



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

UNICAMP – FEEC – DMO, CAMPINAS –SP, C.P. 6101, CEP. 13083-970

Formulação em Elementos Finitos para Estruturas Ressonantes Fotônicas

Tese de Doutorado

Autor: Kléber Zuza Nóbrega

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Campinas

10 de maio, 2004

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

N228f Nóbrega, Kleber Zuza
Formulação em elementos finitos para estruturas
ressonantes fotônicas / Kleber Zuza Nóbrega .--
Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa.
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e da
Computação.

1. Método dos elementos finitos. 2. Guias de ondas
ópticas. 3. MATLAB (programa de Computador) . I.
Figueroa, Hugo Enrique Hernández. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica
e da Computação. III. Título.

-
-
-

Resumo

Neste trabalho de tese, estão aqui apresentadas algumas ferramentas de desenvolvimento para duas formulações distintas do Método dos Elementos Finitos (MEF), nodal e com elementos de aresta, que, seguidamente, são aplicadas na análise de estruturas fotônicas. Numa primeira etapa, três programas gerados em Matlab[®] foram produzidos com o intuito de simplificar, estimular e facilitar o aprendizado do MEF; contudo, no âmbito da pesquisa, estes também mostraram-se eficientes em contemplar a possibilidade do desenvolvimento parcial de explorar novos códigos e formulações em elementos finitos. Na seqüência, estes programas são devidamente utilizados na simulação de algumas estruturas fotônicas lineares ou não-lineares, através de códigos elaborados em Fortran. Em princípio, nestas estruturas destacam-se três pontos principais: a geração de novas condições de camadas absorventes perfeitamente casadas (*Perfectly Matched Layers*) para meios não-lineares; a proposta de um novo guia de onda planar utilizando cristais fotônicos, para reduzir os níveis de potência crítica no fenômeno de biestabilidade óptica; e, por último, a obtenção de uma nova fibra óptica monomodo, com cristais fotônicos, possuindo uma região de invariância bem superior àquelas comentadas na literatura.

-
-
-

Abstract

In this thesis, it has been implemented some numerical and symbolic tools to help in the development of computer subroutines of the Finite Element Method using two distinct formulations, with nodal and edge elements, applied to analysis of photonic structures. In a first stage, three computer programs were developed using Matlab[®] to simplify, to stimulate and to make easy the learning of the MEF. Concerning the research aspects, such programs have been shown to be efficient in the development and exploration of new computer codes and formulations in the MEF. Following, they also have been used to simulate some linear and nonlinear photonic structures, written in Fortran. At first, three main aspects have been considered: a series of new boundary conditions (Perfectly Matched Layers) for nonlinear media; the proposal of a new planar waveguide using photonic crystals, to reduce the critical power in the bistability phenomenon; and, finally, a new topology of a monomode photonic crystal fibers having a wider range of such characteristic than the conventional ones explored in the literature.

-
-
-

Agradecimentos

A Deus, pela minha saúde, e todos os problemas de ordem pessoal e familiar que não tive durante este doutorado;

A minha família e Ana Cristina, que me apoiaram nesta desgastante, difícil e intrigante caminhada, ou melhor, escola, que é um Doutorado;

Ao meu orientador, Prof. Hugo Figueroa, por me aceitar e orientar nesse interessante assunto dos métodos numéricos em óptica integrada. Gostaria especialmente de ressaltar a ajuda, o respeito e a admiração por mim adquiridos para com ele, fundamentalmente na última etapa de meu trabalho. Por último, reafirmar algo que NUNCA, em nenhum momento de crise ou de “minhas revoltas”, deixei de afirmar durante estes 4 anos: “No Brasil, só faria novamente meu doutorado se fosse na UNICAMP, no DMO e com o Hugo.”. Meu muito obrigado e gratidão;

Aos professores Rui Fragassi e Evandro Conforti, ambos dignos do meu apreço e respeito, por motivos que nem mesmo eles imaginam;

Ao supervisor de meu estágio, Prof. Fabrizio di Pasquale, pela confiança, respeito e preocupação sempre demonstrados enquanto trabalhamos juntos;

Ao inesquecível amigo Frasson, e sua esposa, Andrea, pelo apoio, conversas e ensinamentos de vida... o que de mais importante devemos carregar. Foi certamente um prazer trabalhar e dividir momentos de muita alegria, tristeza e “revolta” tanto no trabalho como na vida;

Aos amigos e quase irmãos, Leonardo e Lígia, pela convivência, grande sinceridade e severas críticas sempre demonstradas em meu trabalho e minha maneira de ser, falar e agir como pessoa, mas nunca mal vistas por mim, em especial durante os últimos dois anos;

Ao grandioso amigo César Dartora, pelo seu acurado senso crítico e respeito ao meu trabalho, e importantes ensinamentos para minha formação complementar ao Doutorado;

Ao meu amigo e braço direito em Campinas, Niudomar, pelas conversas críticas e profissionais, bem como todo o suporte e apoio sempre demonstrados desde o dia em que cheguei em Campinas, literalmente;

Ao “sutil” amigo Rubens, pela ajuda dada a minha vinda à Campinas; pelo inspirador e respeitoso profissionalismo dignos de minha admiração (coisa muito difícil de se conseguir!!!!); e pelos apoio e respeito sempre demonstrados por meu trabalho;

Ao ausente mas muito querido amigo, Prof. Horácio Tertuliano, meu grande mentor e primeiro a estimular, apoiar e confiar em mim para esta dura caminhada, o Doutorado, ainda durante minha graduação em 1995;

Ao saudoso colega de trabalho, Vitaly Felix, pela ajuda em elementos finitos, e inúmeros momentos de graça e descontração dentro e fora do laboratório;

Ao colega Sartori, pelas inúmeras conversas e discussões extra trabalho, mas que certamente contribuíram bastante para meu engrandecimento pessoal e profissional;

Ao Michel, pelos inúmeros trabalhos conjuntos realizados;

Ao “distante” colega, Arismar, por todo apoio e suporte dados em Pisa, bem como pela criação de um sentimento mútuo de confiança adquirida entre nós;

Ao “companheiro”, Kleucio, em especial durante o período em que estive ausente do país. Sem sua ajuda eu CERTAMENTE teria estado em maus caminhos;

Ao saudoso Manoel Ribeiro (UFPa), companheiro e experiente, por nossas conversas, trabalhos e críticas nos momentos apropriados, enquanto convivemos juntos;

Aos outros colegas do DMO, CNIT e Itália, “Grande” Socas, Luciano, Carlos Henrique, Milena, André Távora, Rafael, Gallep, Filo, Simone, Antonio, Alessio, Geni, Cláudia, Klevson e Daniela por aturarem e suportarem minhas severas críticas e sempre sinceras opiniões. A verdade muitas vezes é dura, e magoa. A vocês, minhas desculpas quando me excedi e não percebi.

A Elizabeti, Fernando, José, Suzete, Noemia e Gizelda, companheiros e estimuladores nos inúmeros dias, tardes e noites solitárias e sombrias aqui na FEEC-DMO;

À FAPESP e ao DMO, por terem SEMPRE concedido toda a infra-estrutura e suporte necessários durante meu Doutorado;

Para finalizar, gostaria de expressar meus agradecimentos a todas as pessoas que de uma forma ou de outra me ajudaram a chegar até aqui; para elas digo: “muito obrigado”.

-
-
-

Dedicatória

A meus pais, Eclésia e Assis.

Aos velhos amigos: Rubens e Horácio.

Aos novos, feitos em Campinas: Niudomar, Frasson, Leonardo e César.

"Não creias que, rompida uma amizade, não tenhas mais deveres a cumprir.

São os deveres mais difíceis, nos quais só a honradez te sustenta.

Deves respeito à antiga amizade.

Deves abster-se de tornar as brigas públicas e de falar delas, a não ser para justificar-se. "

(Anne-Therese Lambert, Tratado da Amizade)

-
-
-

Lista de figuras

Fig. 2.1. Fluxograma de um problema de elementos finitos.....	8
Fig. 2.2. Guia óptico integrado do tipo costela.....	10
Fig. 2.3. Domínio de discretização.	11
Fig. 2.4. Transformação do Domínio Ω_e para Λ através da Transformação T , gerando o triângulo e o tetraedro mestre para os casos 2D e 3D, respectivamente.....	16
Fig. 3.1. Apresentação inicial do NODAL23D.	25
Fig. 3.2. Detalhe do menu File.	26
Fig. 3.3. Detalhe do menu Element.	26
Fig. 3.4. Detalhe dos menus 2D Domain e 3D Domain, respectivamente.	26
Fig. 3.5. Mensagem do programa, após uma simulação fictícia.	27
Fig. 3.6. Indicação das incógnitas considerando formulação mista com elementos de aresta e nodal em 2D.	35
Fig. 3.7. Apresentação inicial do EDGE2D.	36
Fig. 3.8. Apresentação inicial do MNT23D.	45
Fig. 4.1. Esquemático de um guia de onda 1+1D.	55
Fig. 4.2. Esquema de localização das PMLs 2D.	62
Fig. 4.3. Guia de onda utilizado para simulação 1+1D.	67
Fig. 4.4. Propagação de um feixe num guia de geometria semelhante à Fig. 4.3. $\Delta z=0,1 \mu m$	68
Fig. 4.5. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z=0,01 \mu m$	69

Fig. 4.6. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z=0,001 \mu\text{m}$	69
Fig. 4.7. Fluxograma do algoritmo iterativo.	70
Fig. 4.8. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z=1\mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.	71
Fig. 4.9. Padrões do campo E_x em $z=300\mu\text{m}$ para diferentes passos de propagação e algoritmos.	72
Fig. 4.10. Esquemático de um guia de onda 2D.	73
Fig. 4.11.a. Campo E_x em $z=0 \mu\text{m}$	74
Fig. 4.11.b. Campo E_x em $z=60 \mu\text{m}$ para $\Delta z=0,005 \mu\text{m}$	74
Fig. 4.11.c. Campo E_x em $z=300 \mu\text{m}$ para $\Delta z=0,005 \mu\text{m}$	75
Fig. 4.12.a. Padrões do campo E_x em $z=0 \mu\text{m}$	74
Fig. 4.12.b. Campo E_x em $z=60 \mu\text{m}$ para $\Delta z=0,5\mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.	74
Fig. 4.12.c. Campo E_x em $z=80 \mu\text{m}$ para $\Delta z=0,5\mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.....	75
Fig. 4.12.d. Campo E_x em $z=100 \mu\text{m}$ para $\Delta z=0,5\mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.	75
Fig. 4.13. Exemplo parcial de uma malha usada para a PML adaptativa.	76
Fig. 4.14. Feixe gaussiano viajando de encontro à parede x	79
Fig. 4.15. Feixe gaussiano viajando de encontro à parede y	79
Fig. 4.16. Feixe gaussiano viajando de encontro às quinas da janela computacio- nal.....	80
Fig. 4.17. Feixe gaussiano viajando de encontro às quinas da janela computacional, com outro ângulo de visualização	80
Fig. 5.1. Esquemático de um guia de onda planar não-linear.	85
Fig. 5.2.a. Índice de refração efetivo como função da potência, modificando a altura, b , do guia.	85
Fig. 5.2.b. Modo da Fig. 5. 1 operando no regime linear, $a=2,0\mu\text{m}$ e $b=1,2\mu\text{m}$	85
Fig. 5.2.c. Modo da Fig. 5. 1 operando no regime não-linear, $a=2,0\mu\text{m}$ e $b=1,2\mu\text{m}$	86
Fig. 5.2.d. Índice de refração efetivo como função da potência, modificando a largura, a , do guia.	85

Fig. 5.2.e. Modo da Fig. 5.1 operando no regime linear, $a=1,0\mu\text{m}$ e $b=1,2\mu\text{m}$	85
Fig. 5.2.f. Modo da Fig. 5. 1operando no regime não-linear, $a=1,0\mu\text{m}$ e $b=1,2\mu\text{m}$	86
Fig. 5.3. Esquema básico de uma operação com comportamento biestável.	86
Fig. 5.4.a. Ilustração do guia de onda proposto, topologia circular.	87
Fig. 5.4.b. Ilustração do guia de onda proposto, topologia quadrangular.	88
Fig. 5.5.a. Índice de refração efetivo considerando grade apenas no núcleo. Perturbação circular.	89
Fig. 5.5.b. Índice de refração efetivo considerando grade apenas na casca. Perturbação circular.	89
Fig. 5.5.c. Índice de refração efetivo considerando grade em algumas camadas do núcleo. Perturbação circular.	90
Fig. 5.5.d. Índice de refração efetivo considerando grade em algumas camadas do núcleo. Perturbação circular.	91
Fig. 5.6.a. Índice de refração efetivo considerando grade apenas no núcleo. Perturbação quadrangular.....	91
Fig. 5.6.b. Índice de refração efetivo considerando grade apenas na casca. Perturbação quadrangular.	92
Fig. 5.6.c. Índice de refração efetivo considerando grade em algumas camadas do núcleo. Perturbação quadrangular.	93
Fig. 5.7. Esquemático da nova PCF com grande região de invariância monomodal.....	95
Fig. 5.8. Curva de dispersão para a PCF da Fig. 5.7.	96
Fig. 5.9.a. Componente de campo magnético H_x , em $\lambda=100\text{nm}$	96
Fig. 5.9.b. Componente de campo magnético H_y , em $\lambda=100\text{nm}$	96
Fig. 5.9.c. Componente de campo magnético H_z , em $\lambda=100\text{nm}$	97

-
-
-

Lista de tabelas e listagens

Tabela 3.1. Comandos do MNT23D.	43
Tabela 4.1. Resumo dos mais utilizados tipos de não linearidade em óptica integrada.	61
Tabela 4.2. Tempos de simulação da estrutura Fig. 4.3 para diferentes passos de propagação.	70
Tabela 4.3. Esquema da variável que indexa a dependência entre os elementos.	77
Listagem 3.1. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo das Equações (3.1) e (3.2)	30
Listagem 3.2. Código fonte em padrão FORTRAN e C para o cálculo das Equações (3.4) e (3.5)	30
Listagem 3.3. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo da Equação (3.6)	31
Listagem 3.4. Código fonte em padrão C para o cálculo da Equação (3.8).....	32
Listagem 3.5. Código fonte em padrão C para o cálculo da Equação (3.9).....	32
Listagem 3.6. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo das matrizes G1 e G2 da Equação (3.13).....	38
Listagem 3.7. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo da matriz G3 da Equação (3.13).....	39
Listagem 3.8. Exemplo de expressão gerada pelo MNT23D.....	46
Listagem 3.9. Exemplo de expressão gerada pelo MNT23D para a Equação (3.17) ...	47
Listagem 3.10. Cálculo das MEs usando MNT23D para a Listagem 3.9	50

-
-
-

Conteúdo

Capítulo 1 – Introdução	1
1.1. Histórico do Método dos Elementos Finitos	1
1.2. Motivação da Tese	3
1.3. Contribuições da Tese	4
1.4. Organização da Tese	5
Capítulo 2 – Método dos Elementos Finitos	7
2.1. Descrição do Método dos Elementos Finitos	7
2.2. Cálculo das Matrizes Elementares no MEF	15
2.3. Conclusões	21
Capítulo 3 – Programas em Matlab: NODAL23D, EDGE2D e MNT23D	22
3.1. NODAL23D	22
3.2. EDGE2D	33
3.3. MNT23D	40
3.4. Conclusões	50
Capítulo 4 – Propagadores 1D e 2D não-lineares com passo adaptativo	51
4.1. Não-linearidade e suas implicações práticas na simulação	51
4.1.1. Potência e densidade de potência	54
4.1.2. Coeficiente não-linear e tipos usuais de não-linearidades	60
4.1.3. Condições de contorno e camadas absorventes	61
4.1.4. Aspectos computacionais	63
4.2. Propagadores e PMLs não-lineares	65
4.2.1. Propagador não-linear 1+1D	65
4.2.2. Propagador não-linear 2+1D	72

4.2.3. PML não-linear	75
4.3. Conclusões	81
Capítulo 5 – Cristais fotônicos e aplicações	82
5.1. Cristais fotônicos em guias planares	82
5.2. Cristais fotônicos em fibras ópticas	93
5.3. Conclusões	97
Capítulo 6 – Conclusões gerais e trabalhos futuros	98
6.1. Conclusões gerais	98
6.2. Trabalhos futuros	99
Publicações	101
Revistas	101
Conferências	101
Referências	103

-
-
-

Capítulo 1 – Introdução

No primeiro capítulo desta tese, encontra-se uma descrição daquele que é o objeto principal de estudo, o Método dos Elementos Finitos. Inicia-se por um breve histórico do método e, em seguida, comenta-se sobre a apresentação e considerações gerais sobre a organização e conteúdo de toda a tese.

1.1. Histórico do Método dos Elementos Finitos

Atualmente, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido utilizado em inúmeras áreas da engenharia e ciências da terra, que usam modelos de natureza caracterizada por equações diferenciais parciais. De fato, por se tratar de uma importante ferramenta computacional numérica e científica, o MEF tem tido um grande impacto na teoria e prática de métodos numéricos desde meados do Século XX, inclusive na óptica e nas telecomunicações.

Infelizmente, dizer exatamente quando deu-se início a este método é uma situação um pouco complicada, pois recai no problema básico de definir exatamente o que constitui o “Método dos Elementos Finitos” .

Para a maioria dos matemáticos, sua origem está associada ao apêndice de um artigo de Courant [1], onde são discutidas aproximações lineares contínuas por parte, do problema de Dirichlet, em um domínio usando triângulos. Por outro lado, a aproximação variacional de problemas em uma malha com triângulos vem de muito antes: 93 anos!! Em 1851, Schellbach [2] propôs uma solução, tipo de elementos finitos, para o problema de Plateau onde deseja-se determinar a superfície S , de área mínima,

englobada por uma dada região fechada. Schellbach usou uma aproximação S_t de S , com uma malha de triângulos nas quais a superfície foi representada por funções lineares contínuas por partes, onde, então, ele minimizou S com relação às coordenadas dos hexágonos formados por 6 elementos (ver [3]). Enfim, comparando-se os dois trabalhos nota-se certamente a mesma técnica de elementos finitos quando comparada àquela de Courant.

Apenas para se ter uma idéia, ainda existem alguns que associam a Leibnitz as idéias por detrás do MEF. Isto se deve ao fato de que ele usou aproximações lineares do problema da braquistócrona, proposto por Bernoulli em 1696. Com a ajuda de suas novas ferramentas de cálculo, Leibnitz deduziu a equação diferencial que regia o problema. Entretanto, dois séculos e meio depois foi verificado que as aproximações úteis das equações diferenciais poderiam ser determinadas, não necessariamente utilizando aproximações infinitesimais, como no cálculo, mas mantendo elementos finitos em tamanho. Esta idéia, de fato, é a base do termo “elementos finitos”.

Por outro lado, na engenharia, uma grande parte da comunidade [4]-[5] considera o trabalho de Turner [6] o marco inicial do MEF. Naquele trabalho, um genuíno esforço foi feito na aproximação local de equações diferenciais parciais em um problema de elasticidade, e no uso de estratégias de montagem essencial ao MEF. De fato, este trabalho está associado à famosa fabricante de aeronaves, *Boeing Company*, pois no início dos anos 50 esta encomendou uma solução ao professor H. C. Martin (autor de [6]) sobre os problemas de análise estrutural em suas aeronaves, uma vez que as altas velocidades de seus aviões a jato requeriam novos projetos de asas, assim como novas ligas e materiais na concepção geral da aeronave, a fim de se obter mínimo peso, melhor desempenho, e, o mais importante, segurança de vôo.

Contudo, foi apenas em 1960, com um artigo geral de análise de problemas de elasticidade, que Clough [7] realmente nomeou estas técnicas como o “Método dos Elementos Finitos”. Daí em diante, estes anos 60's serviram para divulgar este novo método, ao mesmo tempo que a comunidade reconheceu sua potencialidade.

Todavia, muitos estudiosos e pesquisadores afirmam que foram as famosas conferências em Daytona [8], EUA, sobre o MEF, que realmente serviram para impulsionar e desenvolver o método. Realizadas em um laboratório da Força Aérea

Americana, nos anos de 1965, 1968 e 1970, estes encontros levaram especialistas do mundo inteiro a discutir os últimos triunfos e fracassos do método. Nestes volumes, pode-se facilmente encontrar alguns dos primeiros artigos sobre metodologias clássicas e conhecidas do MEF. Apenas no primeiro volume, por exemplo, pode-se encontrar as aproximações de Hermite [9], Chi-cúbicas [10] e métodos híbridos [11].

Associado a tudo isso, ainda no final dos anos 60, foi publicada a primeira edição do livro de Zienckievsk [12], que até hoje ainda facilita o ensino e divulgação do MEF. Um outro livro, podendo-se também posicionar como um clássico nesse assunto voltado para eletromagnetismo, é o de Silvester [13], sendo este autor um dos pioneiros no estudo de microonda utilizando o MEF em 1969 [14].

Atualmente, naquele que é o objeto de estudo desta tese (dispositivos ópticos e aplicações gerais em telecomunicações), pode-se afirmar que os dois livros mais usados, conhecidos e respeitados são os dos renomados Jim [15] e M. Koshiba [16]. Muitos outros bons livros existem, e podem surgir, mas para este trabalho, além de muitos artigos lidos de periódicos internacionais, estas duas últimas referências ajudaram bastante no aprendizado e desenvolvimento do presente autor.

1.2. Motivação da Tese

Dentro das motivações, pode-se citar a elaboração de programas numa linguagem de alto nível, cujo objetivo era gerar ferramentas capazes de serem utilizadas num âmbito geral do Método dos Elementos Finitos, independente da área de atuação do usuário. Em sua concepção, estas possuem o papel de auxiliar no desenvolvimento de programas no MEF em C, FORTRAN ou MATLAB, através de sua capacidade em gerar matrizes elementares, e possibilitar manipulações vetoriais. Além disso, também deve-se citar seu caráter didático, uma vez que estas poderiam ser facilmente utilizadas no auxílio ao ensino do MEF em diversos níveis de aprendizado. De fato, isto ficará mais tarde comprovado, ao longo dos Capítulos 2 e 3.

Um outro importante ponto que motivou este trabalho foi o de que, desde o início, existia a possibilidade de tentar construir propagadores não-lineares eficientes, uma vez que tal característica não-linear cria dificuldades inerentes ao MEF, naquilo que diz

respeito ao elevado tempo de simulação, mas que, por outro lado, contempla positivamente a possibilidade da abordagem de efeitos não-lineares no meio material em estudo.

E, finalmente, uma das últimas motivações foi o uso de cristais fotônicos em guias de onda. De fato, pode-se dizer que uma experiência passada do autor com dispositivos ópticos, óptica não-linear e aplicações gerais (incluindo grades de Bragg, acopladores [18]-[19], chaveadores, efeitos de modulação, biestabilidade óptica [20]-[21], etc.), associado à grande explosão e divulgação das chamadas *Photonic Crystal Fibers* (PCFs) durante os últimos dois anos e meio, também serviu para o aproveitamento de tudo aquilo estudado e propor-se alguns trabalhos nesta linha de cristais fotônicos.

1.3. Contribuições da Tese

Em princípio, pode-se afirmar que este trabalho de tese possui três principais contribuições, do ponto de vista do autor, conforme discutidos a seguir:

- 1- O desenvolvimento de ferramentas didáticas e científicas para o aprendizado e elaboração de códigos em elementos finitos usando linguagens C, FORTRAN ou MATLAB. Tais ferramentas consistem em uma série de três programas em Matlab[®] descritos detalhadamente no Capítulo 3. A natureza didática está associada ao fato de que tais programas podem, facilmente, simplificar e ajudar bastante o aprendizado do MEF. Por outro lado, o caráter científico e inovador está presente na possibilidade de se gerar matrizes elementares* no MEF, inclusive as de natureza bastante complexa e que não se encontram tabeladas em livros e/ou periódicos;
- 2- A elaboração de propagadores de feixes ópticos em meios materiais que podem possuir permissividade elétrica não-linear. De fato, o grande mérito está associado à utilização de técnicas de passo

* Tal definição será devidamente explicada e comentada no Capítulo 2.

adaptativo, durante a propagação, para conseguir-se uma melhoria do tempo de simulação e, outro importante ponto, o uso de novas e eficientes técnicas de condições de contorno;

- 3- A utilização de cristais fotônicos em guias de onda planares e circulares (PCFs). No primeiro caso, o objetivo foi utilizar esta nova técnica para reduzir os níveis da potência de chaveamento que define os efeitos de biestabilidade óptica. Por outro lado, nas PCFs, a idéia foi aplicar todo o potencial dessa nova técnica para obter fibras com uma maior região monomodal, propondo o uso de uma nova geometria.

1.4. Organização da Tese

A redação deste trabalho de tese está distribuída em seis capítulos e um apêndice. A escolha e divisão do conteúdo de cada capítulo foi feita com a intenção principal de que o leitor possa entendê-los da maneira mais simples e independente possível, mas sem comprometer a conexão entre os mesmos, ou seja, dependendo do nível e interesse do mesmo, este pode ler e compreender qualquer capítulo sem a obrigatoriedade e necessidade de recorrer a outros.

Este Capítulo 1 apresenta as linhas gerais da tese, explicitando um breve histórico do MEF, a motivação desta tese, bem como os objetivos e a organização geral deste trabalho, através de uma breve discussão sobre o conteúdo de todos os capítulos.

O Capítulo 2 descreve os princípios básicos do MEF. Esta introdução é importante, pois servirá para esclarecer e/ou introduzir o método numérico, bem como esclarecer o conteúdo e as funcionalidades dos programas mostrados no capítulo seguinte.

Em seguida, o Capítulo 3 mostra os três programas desenvolvidos em Matlab: NODAL23D, EDGE2D e MNT23D. Uma vez devidamente introduzido o MEF, os dois primeiros programas possibilitam ao usuário montar e criar, de maneira rápida e eficiente, matrizes elementares para as formulações nodal e com elementos de aresta, respectivamente. Já o MNT23D é uma ferramenta de manipulação vetorial, também

feita em Matlab, que contempla a possibilidade de integrar-se aos outros dois programas citados anteriormente, e/ou simplesmente auxiliar no desenvolvimento de novas formulações, como de costume no grupo de trabalho.

Uma vez utilizados os programas citados anteriormente, parte-se para os Capítulos 4 e 5, que consistem na elaboração de propagadores não-lineares e aplicações em cristais fotônicos, respectivamente.

Em uma primeira visão, o Capítulo 4 discute e apresenta os propagadores com passos adaptativos e condições de contorno eficientes para as situações não-lineares. Já o Capítulo 5 apresenta resultados de algumas idéias inovadoras com o uso de cristais fotônicos em guias de onda planares e fibras ópticas.

No Capítulo 6 são discutidas as conclusões gerais desta tese, bem como perspectivas e propostas para trabalhos futuros e, finalmente, no apêndice, são apresentadas publicações relacionadas com este trabalho de tese de doutorado.

-
-
-

Capítulo 2 – Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo, será apresentado o princípio geral do Método dos Elementos Finitos (MEF). Para explicar e facilitar o entendimento do método, em alguns momentos fez-se necessário comentar alguma formulação específica, sendo, neste caso, considerada a formulação nodal, onde as incógnitas do sistema matricial estão localizadas nos nós dos elementos da malha (apenas elementos triangulares e tetraédricos serão aqui abordados).

Com efeito, será mostrada a formulação para ambos os domínios, bi e tridimensionais. Também deve-se salientar que a explicação abordada é baseada na família dos métodos residuais, no caso o Método de Galerkin, devidamente comentado mais adiante.

A idéia principal deste capítulo é introduzir o MEF para, então, poder explicar, devidamente, as ferramentas do próximo capítulo, nas quais supõem uma base em elementos finitos. Na segunda seção, são feitas algumas considerações que possibilitam a conexão com os programas introduzidos no próximo capítulo.

2.1. Descrição do Método dos Elementos Finitos

A seguir, será dada uma explicação, com detalhes e certos rigores matemáticos, sobre a formulação do MEF. Contudo, para clarear a explicação seria interessante ressaltar, através de um exemplo, a idéia geral por detrás do MEF, o que facilita bastante o entendimento daqueles não muito familiarizados com o método.

Em especial, este último ponto é algo que os livros normalmente não deixam claro o suficiente, uma vez que a abordagem dada é quase totalmente matemática, visando o rigor do método, mas, em contra partida, dificulta o entendimento daqueles completamente leigos e incipientes sobre o assunto.

De fato, apenas para ilustrar, este fato possui uma consequência direta, sem dúvida alguma, sobre o estigma criado de quanto o Método dos Elementos Finitos é difícil e complicado, quando comparado ao Método das Diferenças Finitas, por exemplo.

Pensando exatamente nisto, comentado no parágrafo anterior, e definindo uma das principais características e estilo do autor, assim como do trabalho num todo, este capítulo tentará explanar de uma maneira simples o MEF, mas ao mesmo tempo mantendo uma conotação suficientemente rigorosa, matematicamente, sem perder os fundamentos e a precisão dos resultados.

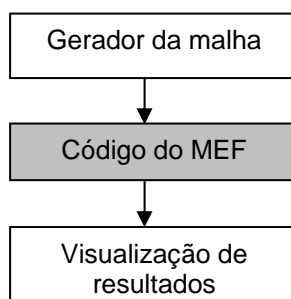


Fig. 2.1. Fluxograma de um problema de elementos finitos.

Em linhas gerais, o procedimento padrão para a solução de um problema qualquer, utilizando o MEF, pode ser resumido a um esquema de três passos básicos, conforme o fluxograma ilustrado na Fig. 2.1.

Num primeiro passo, deve-se definir a malha dos elementos finitos para a estrutura que se deseja estudar, i.e., gerar as coordenadas dos nós da estrutura; indicar a conectividade entre os nós de cada elemento; entrar com as propriedades dos materiais presentes em cada elemento; e, por último, aplicar as condições de contorno apropriadas nos nós apropriados. Existem diversos programas, alguns comerciais e outros gratuitos, eficazes e eficientes; como exemplo, pode-se citar Gid, GMSH, Amtec, etc. [23].

Em seguida, aplica-se o código do MEF apropriado, podendo ser um problema de análise modal ou algum tipo de propagador, que consiste em: ler todas as

informações da malha; montar as chamadas “matrizes elementares”, que fazem a conversão dos operadores diferenciais do modelo em uma série de contribuições individuais, ou seja, atribui-se uma contribuição para cada elemento; somar todas as contribuições das matrizes elementares, para montar as chamadas “matrizes globais” do sistema matricial; e, finalmente, resolver o problema em questão.

Uma vez resolvido o sistema, o último passo consiste em retomar os resultados numéricos e resgatá-los fisicamente através da visualização das incógnitas, ou manipulação destas para se conseguir alguns outros parâmetros inerentes e particulares a cada tipo específico de problema.

Dentro do primeiro passo, será abordado aqui apenas domínios bi e tridimensionais, dentre os quais aqueles mais usados são triângulos, retângulos, quadriláteros, cubos, hexaedros, tetraedros, etc.

Do ponto de vista de formulação, e diversos tipos de elementos, este trabalho é direcionado apenas para elementos triangulares e tetraedros, por serem os dois tipos mais utilizados em microonda e óptica [24]-[26]. O motivo disto certamente está relacionado ao fato de que em problemas bidimensionais, por exemplo, elementos triangulares podem facilmente aproximar qualquer seção planar transversal, e, por analogia, os tetraedros para o caso tridimensional. Com efeito, este processo de discretização da geometria em elementos e nós corresponde exatamente ao termo “malhar”.

Ao modelar-se um sistema físico com o MEF, faz-se necessário resolver uma equação diferencial com uma formulação integral equivalente. Existem dois métodos clássicos para resolver tal problema: o Método de Ritz e o Método de Galerkin [15].

O Método de Ritz, também conhecido como Rayleigh-Ritz, é um método variacional no qual o problema é modelado em termos de uma expressão variacional, denominada “funcional”. A solução aproximada é obtida minimizando o funcional com relação às variáveis que definem uma certa aproximação da solução exata. Quando o sistema é não-conservativo, ou seja, com perdas ou ganho, este procedimento traz alguns inconvenientes, sendo esse um dos motivos dele estar em desuso durante os últimos anos em problemas de modelagem de dispositivos ópticos [16],[25].

Em contrapartida, o Método de Galerkin pertence à família dos métodos residuais que, como o nome indica, buscam a solução através de um resíduo. Um dos pontos positivos deste método é que mesmo o sistema sendo não-conservativo, não se perde o sentimento físico por detrás do mesmo. O procedimento a ser mostrado durante toda esta tese é baseado no Método de Galerkin. Para uma excelente e detalhada leitura sobre histórico, formalismo rigoroso e entendimento, o autor aconselha a leitura de [27].

Dando, então, início à explicação do MEF, pode-se afirmar que a metodologia proposta começa a partir de uma transformação de coordenadas dos domínios 2D e/ou 3D. Em princípio, deve-se obter uma equação diferencial para a geometria selecionada semelhante àquela mostrada em (2.1):

$$L\Phi=f, \quad (2.1)$$

onde L é um operador diferencial, Φ é o campo e f a fonte. Para simplificar o entendimento dos operadores e do método, assumir-se-á um exemplo consistindo em um problema de propagação de um feixe óptico em uma região sem fontes. Neste caso, pode-se pensar em uma estrutura semelhante àquela da Fig. 2.2, sendo x , y e z as coordenadas do sistema cartesiano.

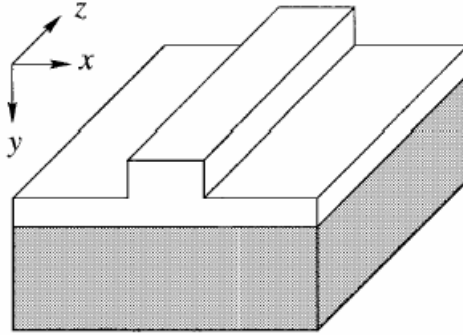


Fig. 2.2 Guia óptico integrado do tipo costela.

Para o modo TE, o modelo matemático pode ser expresso por:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 k_0^2 \right\} E_x = 0, \quad (2.2)$$

sendo n o índice de refração do guia, e k_0 o número de onda. Em seguida, assumindo uma solução do tipo $E_x(x, y, z) = e_x(x, y, z) \exp(-jk_0 n_0 z)$ chega-se à:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2) \right\} e_x = 0, \quad (2.3)$$

onde n_0 é o índice de refração efetivo. Comparando-se as Equações (2.1) e (2.3) pode-se facilmente identificar os operadores L , a incógnita Φ e a fonte f que, neste caso, é nula.

O próximo passo (inerente ao formalismo de Galerkin) consiste em definir a formulação integral equivalente. Para isso, aplica-se a definição de produto interno [27] em ambos os membros da Equação (2.1), utilizando uma função peso w , ainda desconhecida, sobre um domínio Ω , resultando na seguinte equação:

$$\int_{\Omega} w \cdot L\Phi \, d\Omega = \int_{\Omega} w \cdot f \, d\Omega, \quad (2.4)$$

sendo w a função de teste ou peso, e Ω o domínio espacial do problema.

Nesse momento, deve-se ressaltar que o domínio Ω ainda é contínuo, assim como todos os operadores. Num problema de elementos finitos, esse domínio espacial corresponde exatamente àquela geometria onde aplica-se a malha, ou seja, no exemplo em questão, $\Omega \equiv (x, y)$.

Desse passo em diante, dá-se início à discretização do problema. No MEF o domínio é particionado em subdomínios mutuamente exclusivos chamados “elementos” (Ω_i), ver Fig. 2.3.

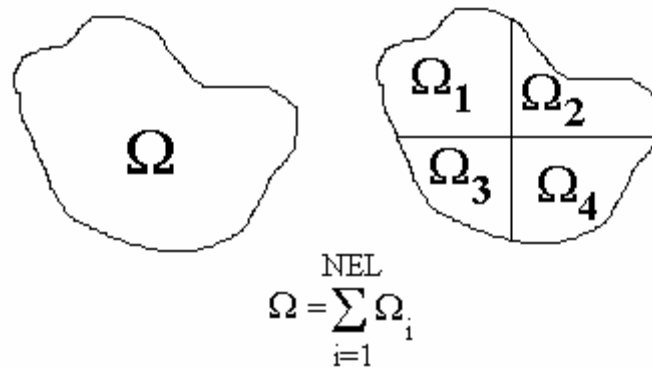


Fig. 2.3. Domínio de discretização.

Desta forma, a incógnita do problema é aproximada por uma expressão da seguinte forma:

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \phi_j c_j = \{\phi\}^T \{c\}, \quad (2.5)$$

sendo ϕ_j um conjunto de funções de base, N o número total de nós, e c_j os novos coeficientes desconhecidos a serem calculados nos nós dos triângulos ou tetraedros.

Ainda relacionado à Equação (2.5), ela será importante pois ajudará a entender o MEF quando for necessário discutir o comportamento matricial do sistema linear que se criará. De fato, o terceiro termo da igualdade indica a notação matricial da incógnita, sendo T , $\{.\}$ e $\{.\}^T$ operadores denotando vetor transposto, vetor coluna e vetor linha, respectivamente. Deve-se observar que as novas incógnitas, c , são encontradas e salvas num vetor coluna. Esta observação será ressaltada mais adiante.

Finalmente, o significado da Equação (2.5) no exemplo em questão pode ser resumido à

$$e(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x, y) c_j(z) = \{\phi(x, y)\}^T \{c(z)\}. \quad (2.6)$$

Nota-se que, em princípio, o campo e é função das três coordenadas do sistema; todavia, tratando-se de um problema de propagação com variação temporal harmônica, apenas, pode-se separar a evolução do campo nas três dimensões através de um esquema conjunto de elementos finitos e propagação (Método de Crank-Nicholson [16]). Os elementos finitos são responsáveis pela parte transversal, ou seja, a malha atua em duas dimensões (ver (2.6)) ao passo que, para a variação axial, desenvolve-se o próprio “modelo de evolução” da equação diferencial.

Pode-se entender o que acima foi comentado, como um esquema de fotografias, ou seja, em cada posição z é tirada uma “foto” do campo elétrico, estando nesta foto revelado o seu aspecto transversal, descrito apenas pelos elementos finitos. Por outro lado, tratando-se de um problema de propagação, onde deseja-se observar a evolução da incógnita com a distância, calcula-se explicitamente a variação do campo ao longo de z (distância) usando Crank-Nicholson.

Dando continuidade no entendimento do sistema matricial a ser criado, deve-se substituir a Equação (2.5) em (2.4), conseguindo-se a seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} w \cdot L\phi_j \, d\Omega \right) c_j = \int_{\Omega} w \cdot f \, d\Omega \quad , \quad (2.7)$$

que compreende uma equação de N variáveis. Para obter um sistema matricial de N equações e N variáveis, precisa-se definir a discretização das funções de peso. No Método de Galerkin, pode-se considerar o mesmo conjunto das funções de base para a interpolação das funções peso [31], i.e.,

$$w = \{\phi_i\} \quad , \quad (2.8)$$

e rescrever a expressão (2.7) como:

$$\sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \phi_i \cdot L\phi_j \, d\Omega \right) \right] c_j = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \phi_i \cdot f \, d\Omega \quad . \quad (2.9)$$

A Equação (2.9) representa um ponto importante pois estabelece o sistema matricial presente na formulação do Método dos Elementos Finitos, uma vez que para as N escolhas independentes de w obtém-se um conjunto de N equações linearmente independentes [15].

Ainda relacionado à equação anterior, nota-se que o operador L continua atuando sobre o domínio total Ω . Conforme mencionado anteriormente, este domínio será discretizado em elementos para somar a contribuição individual de cada um destes no total. Sendo assim, pode-se então reescrever a Equação (2.9), em sua forma matricial, como

$$\left\{ \sum_{e=1}^{NEL} \int_{\Omega_e} \{\phi_i^e\} \cdot L\{\phi_j^e\}^T \, d\Omega_e \right\} \{c_j\} = \left\{ \sum_{e=1}^{NEL} \int_{\Omega_e} \{\phi_i^e\} \cdot f \, d\Omega_e \right\} \quad . \quad (2.10)$$

Em (2.10), o operador L atua individualmente em cada um dos elementos e soma a contribuição de todos eles. Sendo assim, percebe-se que ϕ_j^e é a parte de ϕ_j no elemento e , respectivamente. Isto fica claro observando a Fig. 2.3, i.e., considerando-se que lá existem 4 subdomínios (elementos) Ω_j , a única interseção dos mesmos é exatamente um ponto, e no caso de triângulos seriam os nós adjacentes, de tal maneira que facilmente observa-se que $\phi_j = \sum_{e=1}^{NEL} \phi_j^e$.

As integrais ao longo do domínio Ω_e são chamadas aqui de “matrizes elementares”, estando representadas em (2.10) por

$$\int_{\Omega_e} \{\phi_i^e\} \cdot L\{\phi_j^e\}^T d\Omega_e . \quad (2.11)$$

Deve-se ressaltar o “chamadas aqui” no parágrafo anterior, pois, da maneira como todos os livros colocam [13]-[16], [31], estes referenciam as MEs como as contribuições independentes das características físicas, ou seja, são simples matrizes fixas, com números, e independem da área de estudo. Por outro lado, o operador L possui todas as operações diferenciais bem como as características dos meios físicos envolvidos.

No caso deste trabalho, os programas explicados no próximo capítulo contemplam, ou não, as características físicas para definir as MEs. A diferença é que, dependendo do nível do trabalho, pesquisa ou apenas de caráter didático, os programas podem considerar, de modo positivo para o programador, a inclusão das características físicas, ou não, sendo ambos os casos referenciados como MEs. Mais uma vez, deve-se ressaltar que isto não altera, num senso geral, nem complica de modo algum, a definição das MEs.

No exemplo em consideração, o sistema expresso pelo membro esquerdo de (2.10) pode ser colocado como:

$$[M] \frac{\partial^2 \{c_i\}}{\partial z^2} - 2jk_0 n_0 [M] \frac{\partial \{c_i\}}{\partial z} + ([K] + k_0^2 n_0^2 [M]) \{c_i\} = \{0\} , \quad (2.12)$$

onde

$$[K] = \iint_{\Omega} n^2 \{\phi_i\} \{\phi_j\} - \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial x} \frac{\partial \{\phi_j\}}{\partial x} - \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial y} \frac{\partial \{\phi_j\}}{\partial y} dxdy \quad (2.13)$$

e

$$[M] = \iint_{\Omega} \{\phi_i\} \{\phi_j\} dxdy . \quad (2.14)$$

É perceptível que as equações (2.12)-(2.14) ainda consideram o domínio Ω , ou seja, não existe uma contribuição dos operadores em termos de elementos. Essa parcela é expressa pelo lado esquerdo de (2.10), de maneira que (2.13) e (2.14) tornam-se

$$[M] = \sum_e \iint_e \{\phi_{i-e}\} \{\phi_{j-e}\} dx dy \quad (2.15)$$

e

$$[K] = \sum_e \iint_e n^2 \{\phi_{i-e}\} \{\phi_{j-e}\} - \frac{\partial \{\phi_{i-e}\}}{\partial x} \frac{\partial \{\phi_{j-e}\}}{\partial x} - \frac{\partial \{\phi_{i-e}\}}{\partial y} \frac{\partial \{\phi_{j-e}\}}{\partial y} dx dy, \quad (2.16)$$

respectivamente.

Confrontando os comentários sobre a nomenclatura do que são as MEs e as expressões (2.15) e (2.16), percebe-se que (2.15) é puramente matemática, enquanto que (2.16) inclui propriedades que dependem da estrutura e física do problema. Enfim, pode-se afirmar que a Equação (2.16) finaliza o processo de formulação do MEF.

Uma vez que o exemplo proposto está devidamente explicitado, a próxima etapa consistiria em aplicar o esquema de propagação de Crank-Nicholson [16] em (2.12) e resolver o sistema, mas esta explicação está fora do escopo deste trabalho. De fato, em seguida discutir-se-á o enfoque principal, as matrizes elementares (MEs).

2.2. Cálculo das Matrizes Elementares no MEF

De maneira geral, ao iniciar-se um novo programa em elementos finitos, e este não funcionar adequadamente, existe uma tendência natural a verificar ou duvidar sempre, em primeira mão, das MEs. Até então, o formalismo do MEF, aqui mostrado, ateu-se à matemática envolvida, mas sem entrar nos detalhes da programação e de como fazer para implementar todos os operadores e funções comentadas anteriormente.

Para explicar melhor tal procedimento, o ponto de partida será a expressão (2.10). Em princípio, o lado esquerdo mostra o operador L atuando sobre o domínio Ω , e, seguidamente, este domínio é dividido em um conjunto de outros domínios contíguos, Ω_e , ou elementos. O lado esquerdo da expressão sugere que tal operador atue em cada um dos elementos e adicione a contribuição individual de cada um deles. As perguntas agora são: Qual a relação entre o operador L e a malha? E como faz-se para programar tal operador?

Para responder às perguntas anteriores, deve-se observar a Fig. 2.4. Nesta figura, é considerado um elemento isolado, parte de uma malha qualquer, em ambos os casos bi e tridimensionais.

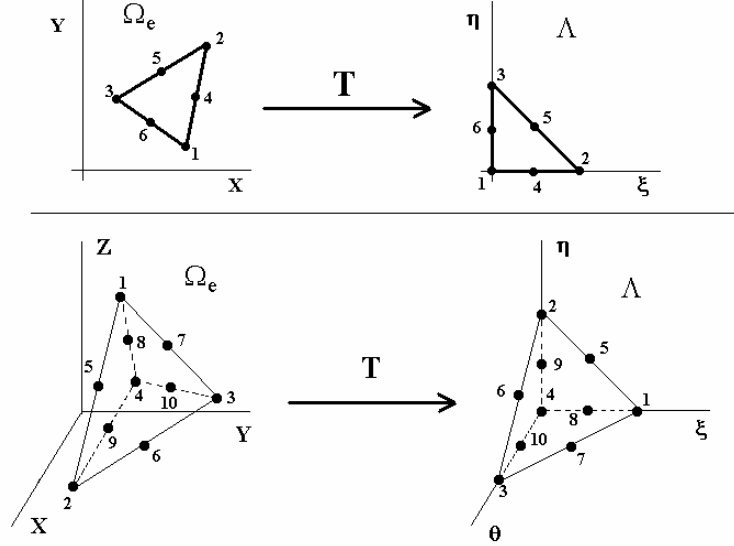


Fig. 2.4. Transformação do Domínio Ω_e para Λ através da Transformação T , gerando o triângulo e o tetraedro mestre para os casos 2D e 3D, respectivamente.

A numeração, que vai de 1 a 6, no caso bidimensional, e de 1 a 10, no caso tridimensional, está relacionada com a precisão da aproximação para os campos. Em outras palavras, quando são suprimidas as numerações de 4 a 6 e 5 a 10, para os casos bi e tridimensionais, respectivamente, está encontrando-se as incógnitas seguindo uma aproximação linear; caso contrário, seria a aproximação quadrática [15]. Deve-se ainda notar que esse elemento geral é escrito nas mesmas coordenadas generalizadas x , y e z do exemplo em consideração.

É importante frisar que um dos pontos básicos do MEF é uma simples transformação, T , do domínio Ω_e para o domínio Λ , cujo único propósito é facilitar a integração da expressão (2.10). Nessa transformação de coordenadas, o novo domínio Λ é chamado de “elemento mestre”. Deve-se notar que nenhuma transformação do domínio físico está envolvida na análise de elementos finitos; o que existe, sim, é uma manipulação matemática ou, rigorosamente falando, uma simples transformação linear de coordenadas, conforme as muitas estudadas em um curso básico de álgebra linear.

A mudança dos domínios Ω_e para Λ , ou, equivalentemente, de (x, y, z) para (ξ, η, θ) , é acompanhada por uma transformação de coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^m x_j^e L_j(\xi, \eta, \theta) \\ y &= \sum_{j=1}^m y_j^e L_j(\xi, \eta, \theta) \\ z &= \sum_{j=1}^m z_j^e L_j(\xi, \eta, \theta) \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde m é um índice que vale 3 ou 4, se o domínio de discretização é 2D ou 3D, respectivamente, e as funções de interpolação, L_j , denotam as chamadas “coordenadas de área ou de volume” [16], dadas por:

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \quad L_2 = \xi \quad \text{e} \quad L_3 = \eta, \quad (2.18)$$

para o caso 2D, e

$$L_1 = \xi \quad L_2 = \eta \quad L_3 = \theta \quad L_4 = 1 - \xi - \eta - \theta \quad , \quad (2.19)$$

para o caso 3D.

É importante deixar claro a escolha dessas funções de interpolação, e suas relações mútuas. Observando a Fig. 2.4, bem como as relações de transformação colocadas no parágrafo anterior, percebe-se que tais funções são contínuas, apresentam derivada de primeira ordem e são independentes entre si [16]. Estas características, citadas anteriormente, garantem a convergência da solução [16]. A partir daí, é possível também aproveitar as mesmas relações, (2.18) e (2.19), para montar as funções de base (ϕ_j) e de peso (ϕ_i) como:

$$\left\{ \begin{aligned} \{\phi\} &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad \{\phi\} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1-1) \\ L_2(2L_2-1) \\ L_3(2L_3-1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_3L_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{aligned} \{\phi\} &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad \{\phi\} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1-1) \\ L_2(2L_2-1) \\ L_3(2L_3-1) \\ L_4(2L_4-1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_3L_1 \\ 4L_1L_4 \\ 4L_2L_4 \\ 4L_3L_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. , \quad (2.20)$$

para os casos 2D e 3D, respectivamente. Equação (2.20) mostra ambas as aproximações, lineares e quadráticas, de ϕ , expressas nas primeiras e segundas colunas, respectivamente. Para o Método de Galerkin, descrito anteriormente, foi comentado que as funções de base e de peso coincidem; daí os ϕ , de (2.20), serem usados em ambas aproximações.

Em princípio, na expressão (2.10), L é um operador geral que pode atuar nas funções de peso ou de base através de diferenciais; mas, também, pode conter coordenadas bem como as próprias funções. Até então, estes últimos dois atuadores já podem ser expressos baseados nas expressões (2.17) e (2.20), respectivamente.

Para finalizar os últimos componentes de L , deve-se agora definir os operadores diferenciais na expressão (2.10). O integrando em (2.10) pode, usualmente, possuir diferenciais em x , y ou z , as chamadas “diferenciações globais”. Desta forma, é importante definir e tornar explícita a relação entre as diferenciações, no sistema de coordenada cartesiana, e as coordenadas do “elemento mestre”. Para isso, faz-se uso da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \partial\phi^e / \partial\xi \\ \partial\phi^e / \partial\eta \\ \partial\phi^e / \partial\theta \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \partial\phi^e / \partial x \\ \partial\phi^e / \partial y \\ \partial\phi^e / \partial z \end{bmatrix} , \quad (2.21)$$

onde $[J]$ é conhecida como “Matriz Jacobiana”; levando-se em conta o caso genérico tridimensional, ela é definida como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta & \partial z / \partial \theta \end{bmatrix}^e. \quad (2.22)$$

Anteriormente, na Fig. 2.4, foi mencionada uma transformação linear T , que é simplesmente expressa através de (2.21) e (2.22). De fato, a mudança das coordenadas (x, y, z) para (ξ, η, θ) está exposto em (2.21), utilizando o clássico e bastante utilizado operador da álgebra linear, (2.22). Por outro lado, tirando a inversa da expressão (2.21), encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \partial \phi^e / \partial x \\ \partial \phi^e / \partial y \\ \partial \phi^e / \partial z \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial \phi^e / \partial \xi \\ \partial \phi^e / \partial \eta \\ \partial \phi^e / \partial \theta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

sendo

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e. \quad (2.24)$$

As expressões anteriores são importantes, pois ajudam a calcular as operações diferenciais em x, y e z a partir das operações diferenciais no triângulo ou tetraedro mestre.

Um último e importante operador está relacionado com a Equação (2.10). Nesta, percebe-se que o operador diferencial L está definido no domínio (x, y, z) . Contudo, o resultado (2.23) pode ser usado para transformar diferenciais múltiplas de coordenadas retangulares em curvilíneas quaisquer. Para conseguir as relações integrais, existe também a seguinte relação

$$\iiint_{\mathcal{R}} F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{R}} G(u_1, u_2, u_3) |J(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3 ,$$

(2.25)

sendo \mathcal{R} a região demarcada pela transformação e $G(u_1, u_2, u_3)$ é o valor de $F(x, y, z)$ correspondente à transformação. No caso específico do MEF, e claramente explicitando, a relação (2.25) é expressa como:

$$\iiint_{\Omega_e} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Lambda} g(\xi, \eta, \theta) |J(\xi, \eta, \theta)| d\xi d\eta d\theta , \quad (2.26)$$

onde $|J(\xi, \eta, \theta)|$ é o determinante da Matriz Jacobiana, conhecido como “Jacobiano”. Talvez a expressão (2.26) seja aquela que melhor demonstra a simplicidade do MEF. Em termos práticos, ela mostra que o operador L de (2.10) é, na realidade, $f(x, y, z)$, e a integral está definida nas coordenadas (x, y, z) , mas em apenas um elemento. Para facilitar as contas, explica-se, agora, a necessidade de uma transformação de coordenadas expressas pelo Jacobiano, e a integral anterior será, então, calculada no domínio do elemento mestre, i.e., nas coordenadas (ξ, η, θ) .

Como uma última consideração sobre o MEF, ainda não foi encontrado o valor de $|J(\xi, \eta, \theta)|$. De fato, $|J|$ vale duas vezes a área do triângulo considerado, i.e., $2A_e$, e seis vezes o volume do tetraedro, $6V_e$, (ambos definidos em Ω_e) para domínios 2D e 3D, respectivamente. Para uma explicação mais formal e matemática sugere-se a leitura de [13]-[15]; todavia, uma maneira intuitiva (mas não clara o suficiente em nenhum destes livros citados acima) de observar estes valores pode ser encontrada, baseada em simples operações da geometria plana, conforme mostrado a seguir.

Conforme explicitado, a transformação dos domínios envolvidos é linear. Com esta importante consideração, aliada às regras básicas da congruência em geometria plana, consegue-se montar uma simples regra de três. A relação entre um elemento diferencial de área (volume) em cada triângulo (ou tetraedro, para o caso tridimensional), da Fig. 2.4, é proporcional à relação entre as áreas (volumes) de cada triângulo (tetraedro) mestre, ou seja:

$$\frac{dxdy}{d\xi d\eta} = \frac{A_e}{1/2} \Rightarrow dxdy = 2A_e d\xi d\eta \quad (\text{caso 2D}) \quad (2.27)$$

e

$$\frac{dxdydz}{d\xi d\eta d\theta} = \frac{V_e}{1/6} \Rightarrow dxdydz = 6V_e d\xi d\eta d\theta \quad (\text{caso 3D}) . \quad (2.28)$$

Os números 1/2 e 1/6 são, respectivamente, as áreas do triângulo e volume mestres, uma vez que as arestas dos elementos mestres são unitárias.

Em suma, tendo em vista todo o desenvolvimento e relações de transformação mostradas a partir das equações (2.17)-(2.28), poder-se-ia, agora, facilmente desenvolver e montar algumas matrizes elementares e ilustrar a funcionalidade do NODAL23D, EDGE2D e MNT23D.

Basicamente, os dois primeiros programas calculam as MEs para as formulações nodal e com elementos de aresta, respectivamente, ao passo que o último programa atua diretamente sobre o operador L e, depois, pode interagir, ou não, com o NODAL23D.

2.3. Conclusões

Neste capítulo, foi mostrada de modo simples, mas prático, a formulação do Método dos Elementos Finitos. De fato, com a ajuda de um exemplo, explicou-se passo-a-passo as diversas etapas do método, com o objetivo principal de facilitar o entendimento do formalismo matemático àqueles não familiarizados com o método.

Uma vez explicado o MEF, dedicou-se também uma seção ao processo de como programar tudo que foi anteriormente explicado, enfatizando e definindo, inclusive, as matrizes elementares. Isto foi feito, pois possibilita ao leitor que sejam introduzidos, no próximo capítulo, três programas que montam tais matrizes e, também, manipulam operadores vetoriais para integrar mais ainda o processo desde a concepção dos operadores diferenciais, referenciados em (2.1).

-
-
-

Capítulo 3 – Programas em Matlab: NODAL23D, EDGE2D e MNT23D ---

No capítulo anterior, foi introduzido o Método dos Elementos Finitos e seus fundamentos básicos, finalizando com o processo para programar e calcular as matrizes elementares (MEs). Este capítulo, por outro lado, utiliza toda a teoria do MEF para apresentar as funcionalidades e aplicações de três diferentes programas concebidos em Matlab: NODAL23D, EDGE2D e MNT23D.

Em princípio, os dois primeiros programas estão relacionados com montagem de matrizes elementares, ao passo que o terceiro envolve manipulação de operadores, contemplando a possibilidade de interação com o primeiro.

Para cada um dos programas, será dada uma explicação de seus manuseios, apresentação de suas aparências, citação de exemplos e, por último, como eles podem interagir entre si, se for o caso.

3.1. NODAL23D

São freqüentes as dificuldades que surgem ao se tentar calcular as MEs no MEF. Entre as mais comuns, pode-se citar o fato de tentar encontrá-las de maneira analítica e exata, especialmente em formulações complexas onde a integração numérica não é *a priori* desejada e as matrizes elementares não estão tabeladas. De fato, essas integrações feitas numericamente eram bem mais comuns até o início dos anos 90, onde os computadores e *softwares* no MEF não eram tão integrados [13].

Uma outra fonte de erro faz-se presente se a ME já existe formatada e montada para uma linguagem de programação, como C, e um outro aluno ou pesquisador deseja

passá-la para o formato FORTRAN, por exemplo. Geralmente, esta intervenção acaba causando algum tipo de erro no formato da escrita.

Em um típico problema de MEF, também, é comum ter-se pelo menos seis MEs fundamentais e, ao tentar transcrever tais matrizes de uma dada linguagem para outra, a experiência com programação mostra que é comum ocorrerem erros, por se tratarem de muitos números e índices de vetores ou matrizes, o que pode atrasar bastante o desenvolvimento inicial do trabalho.

Um outro importante caso é a dificuldade sempre presente em calcular-se MEs nas situações onde deseja-se calcular integrais de fluxo, tanto para o caso 2D como 3D (nestes casos estas são integrais de linha e de área, respectivamente). Estas matrizes são, certamente, as mais difíceis de se calcular, pois envolvem transformações mais complexas no sistema de coordenadas, bem como requerem um esforço triplicado (caso 2D) ou quadruplicado (3D) daqueles que deparam-se com as mesmas, uma vez que são geradas três e quatro matrizes respectivamente. Nos exemplos mostrados na próxima seção, isto ficará claro.

Ao longo de trabalhos e programas, é muito comum também, num resultado primário no MEF, utilizar-se MEs com aproximações de campo linear. Todavia, para a resolução de problemas com uma melhor aproximação é de praxe utilizar aproximações quadráticas dos campos, que implicam diretamente num aumento de cálculo devotado para achar as MEs.

Aliado a tudo isto, não é de nosso conhecimento a existência de ferramentas especializadas capazes de contornar todos estes problemas de uma só vez, e de forma tão geral. O que existe são pacotes computacionais em elementos finitos (ANSYS, NISA, LS-DYNA) especializados em alguns tipos de problemas, em diferentes áreas, que não possibilitam ao usuário participar e/ou contestar o modelo matemático interno aos mesmos. Também, deve-se ressaltar que normalmente o manuseio destas ferramentas de análise é complicado, sendo comum a necessidade de engenheiros que conheçam a teoria de elementos finitos para conseguir traduzir e interpretar os resultados obtidos.

Enfim, estas são apenas algumas das principais dificuldades presentes no cálculo das MEs no MEF. Foi pensando nisso, e observando também que não existe

uma ferramenta popular capaz de resolver e acelerar o processo de aprendizado no MEF, que resolveu-se implementar o NODAL23D. A interface gráfica NODAL23D (*NODAL 2 and 3 Dimensions*) provê uma solução para tudo isso acima explanado, além de outras facilidades introduzidas.

O Matlab foi escolhido como ambiente de programação devido à sua ampla popularidade, tanto em ambientes profissionais como acadêmicos, expressos através do grande número de livros, aplicações industriais, *softwares* e ferramentas de ensino, bem como sua simplicidade de programação, e possibilidade de ser executado tanto em sistemas operacionais Windows[®] como Li(Unix). De mais a mais, as capacidades de visualização e ferramentas matemáticas disponíveis no MATLAB tornam o programa bastante eficiente, eficaz e fácil de manusear, incentivando outrossim o seu uso.

O NODAL23D consiste numa interface gráfica com o usuário, feita em Matlab, utilizando esquema *point and click*. A função deste é montar matrizes elementares com algumas características particulares:

- 1- Domínio de discretização pode ser $2D(x,y)$ ou $3D(x,y,z)$, utilizando elementos triangulares ou tetraédricos;
- 2- As matrizes geradas podem possuir aproximações lineares ou quadráticas;
- 3- Calcula integrais de área e de linha (caso 2D), ou volume e superfície (3D);
- 4- Exporta matrizes nos formatos Fortran, C ou Matlab;
- 5- Uma vez salvas em arquivo, as MEs mantêm o mesmo nome do arquivo;
- 6- O programa gera um cabeçalho indicando qual operação gerou aquela matriz.

Anteriormente, foi mostrado passo-a-passo o MEF usando o Método de Galerkin. Conforme mencionado, as expressões (2.17)-(2.28) apresentam os passos básicos para a montagem das MEs. Para conseguir montá-las, na interface do NODAL23D, o usuário deve apenas escolher os operadores que irão atuar sobre as funções de base e de peso, enquanto que o restante do processo para montagem das matrizes elementares permanece transparente para o usuário. A interface básica do programa está mostrada na Fig. 3.1, com suas funções e utilização devidamente comentadas nos próximos parágrafos.

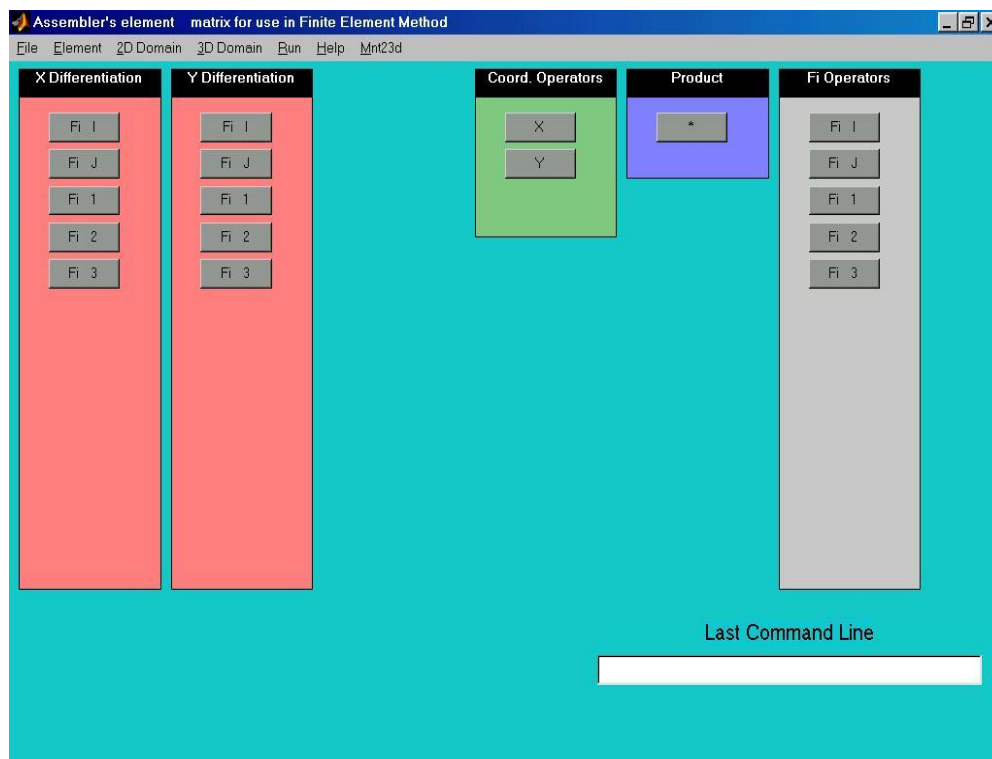


Fig. 3.1. Apresentação inicial do NODAL23D.

Uma vez escolhidas as operações necessárias para a montagem das MEs, o usuário deve entrar na barra de tarefas principal, e selecionar algumas opções. Conforme visto na Fig. 3.1, existem sete menus básicos: *File*, *Element*, *2D-Domain*, *3D-Domain*, *Run*, *Help* e *Mnt23d*. Com exceção de *Run* (executa a ordem de gerar as MEs) e *Mnt23d* (chama um outro programa devidamente explicado mais adiante), todos os outros menus possuem submenus, e estão detalhados seguidamente.

Em *File* é possível encontrar 4 opções: *New*, *Export*, *Import* e *Quit*. *New* deve ser selecionado toda vez que é necessário calcular uma nova matriz elementar. Em *Export* pode-se exportar a matriz gerada em três diferentes formatos (também selecionáveis): FORTRAN, C e MATLAB. *Import* está relacionado com o outro programa *Mnt23d*, que importa os resultados destes (explicados num capítulo seguinte), e, finalmente, *Quit* finaliza o programa. Ver Fig. 3.2.



Fig. 3.2. Detalhe do menu File.

Na segunda barra principal, *Element*, o usuário pode escolher entre *Linear* ou *Quadratic*. A opção padrão do programa é *Linear*. De fato, o usuário está assim escolhendo aproximações lineares ou quadráticas para as funções de base, que resultam em matrizes 3x3 (2D) ou 4x4 (3D) e 6x6 (2D) ou 10x10 (3D), respectivamente, baseado na Fig. 2. 4. Ver Fig. 3.3.

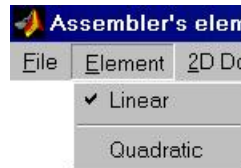


Fig. 3.3. Detalhe do menu Element.

Se o domínio Ω_e , em (2.10), é 2D ou 3D deve-se selecionar *2D-Domain* ou *3D-Domain*, respectivamente, na Fig. 3.4. No primeiro caso, o usuário pode optar entre integrais de superfície ou fluxo, através de *Surface* ou *Flow*, respectivamente, ao passo que, em 3D, a preferência deve ser entre volume ou superfície, selecionando-se *Volume* ou *Surface*. Deve-se apenas lembrar que *Flow* e *Surface* para os casos 2D e 3D, respectivamente, são as integrais mais complexas comentadas no capítulo anterior.



Fig. 3.4. Detalhe dos menus 2D Domain e 3D Domain, respectivamente.

Através de simples toques nos operadores (*point and click interface*), define-se o integrando de (2.26) para, em seguida, selecionar *Run*, que executa a ação de gerar a matriz. Por último, em *Help* pode-se encontrar informações sobre os autores (K. Z.

Nóbrega, A. M. F. Frasson e H. E. Hernández-Figueroa) e um conciso guia do usuário a respeito do programa.

Ainda relacionado à Fig. 3.4, nota-se que o domínio padrão é bidimensional. De fato, isto explica porque, naquela apresentação inicial, aparece apenas *X-Differentiation* e *Y-Differentiation*. Os outros operadores são *Fi-Operators*, *Coordinate Operators*, e *Product*. Para os botões relacionados à *X-Differentiation*, *Y-Differentiation* e *Fi-Operators*, existem associados os índices i e j , onde estes índices foram usados para referir-se às funções de peso e de base, como em (2.20).

Na apresentação inicial, os sub-índices 1, 2 e 3 ocorrem devido ao fato dos operadores padrões serem lineares. Para domínios 3D, o usuário observará uma sexta barra chamada *Z-Differentiation*. Ao considerar-se elementos quadráticos, em 2D, os índices 4, 5 e 6 aparecem. Já para o caso quadrático em 3D, observa-se a adição dos índices 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Se não bem compreendido, aconselha-se reler novamente o Capítulo 2.

Entre outras características do programa, mas no que diz respeito à interface com o usuário, tentou-se fazê-la da maneira mais simples possível, mas disponibilizando todos os recursos práticos àqueles que programam em MEF. Sendo assim, o NODAL23D possui um verificador interno de erros que trava os botões se algo incompatível for feito pelo usuário. Também associado a isto, se tudo ocorrer como esperado, o programa emite uma mensagem na tela, avisando que o processo finalizou e a matriz foi gerada com sucesso, mostrando a mensagem em azul *End of Simulation. Matrix Generated*, conforme mostrada na Fig. 3.5.



Fig. 3.5. Mensagem do programa, após uma simulação fictícia.

Ainda nos apelos visuais e com o intuito de evitar qualquer engano, a cada novo toque (ou comando) executado pelo usuário, o programa disponibiliza uma mensagem no canto direito inferior da tela. Ver Fig. 3.5.

Uma vez geradas as MEs com sucesso, deve-se, então, armazená-las em arquivos .C, .F, ou .M. Para isso, o programa gera um cabeçalho dentro do arquivo que identifica o integrando responsável por aquela matriz. Isso é importante pois ao se fazer

um programa com o MEF, o programador normalmente necessita de várias matrizes; daí, ao especificar que o integrando gerou tal matriz, diminui-se a possibilidade de enganos ou erros de programação.

Também, para facilitar a exportação das matrizes, toda vez que o usuário as salva em arquivo, este é o próprio nome interno das matrizes. Por exemplo, se um usuário exporta uma matriz para o arquivo *A.m*, os elementos da matriz escritos dentro deste arquivo são $A(1,1)$, $A(1,2)$, etc. Esta característica salva tempo, evitando que depois sejam renomeadas tais matrizes inapropriadamente.

Ainda relacionado a isto, evita-se também, automaticamente e transparente ao usuário, a indexação diferente entre C ou Fortran. Em outras palavras, sabe-se que, em C, as matrizes são indexadas começando pelos índices $[0][0]$, ao passo que em Fortran e Matlab são $(1,1)$.

Finalmente, com relação ao tempo gasto para gerar as matrizes, pode-se afirmar que em nenhum caso em consideração, foram gastos mais de 15 segundos, quando utilizado um modesto microcomputador AMD/K6-2 de 500 MHz de *clock* e 128 MB de memória RAM. De fato, isto pode ser explicado, uma vez que as operações internas são simplesmente integrais e diferenciações, expressas em (2.17)- (2.28).

Com tudo isso explicado, nota-se o porquê de sua importância para qualquer um que esteja desenvolvendo ou trabalhando com elementos finitos, uma vez que tal ferramenta possui diversos níveis de detalhes, peculiares à programação, de um modo geral. Além disso, a própria montagem e a concepção do programa deixam transparente ao usuário algumas sutilezas do MEF. Para exemplificar os dados de saída do programa, vejamos alguns exemplos retirados de formulações já estudadas no Departamento de Microonda e Óptica da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP.

Exemplo 1: A equação descrita a seguir foi desenvolvida em [22],[28] e refeita durante o processo de aprendizado no MEF, servindo para análise de guias de ondas ópticos.

$$\nabla_t \times (\varepsilon_{zz}^{-1} \nabla_t \times H_t) - \vec{z} \times [\varepsilon_t^{-1} \cdot \nabla_t \times (\vec{z} \nabla_t \cdot H_t)] - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 H_t + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \gamma^2 \vec{z} \times [\varepsilon_t^{-1} \cdot (\vec{z} \times H_t)] = 0, \quad (3.1)$$

onde γ é a constante complexa de propagação, ε_0 a permissividade elétrica do vácuo, μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo, e ω a frequência angular da onda. Além disso, o

tensor de permissividade ε é da forma $\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_{zz} \vec{z} \vec{z}$, e

$\varepsilon_t = \varepsilon_{xx} \vec{x} \vec{x} + \varepsilon_{xy} \vec{x} \vec{y} + \varepsilon_{yx} \vec{y} \vec{x} + \varepsilon_{yy} \vec{y} \vec{y}$. A Equação (3.1) gera seis MEs fundamentais, divididas entre quatro integrais de superfície e duas integrais de linha, mostradas a seguir:

$$S1_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial y} dx dy \quad (3.2)$$

$$S2_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial x} dx dy \quad (3.3)$$

$$S3_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial x} dx dy \quad (3.4)$$

$$S4_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial y} dx dy \quad (3.5)$$

$$F1_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial x} \{\phi_i\} d\Gamma_e \quad (3.6)$$

$$F2_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial y} \{\phi_i\} d\Gamma_e \quad (3.7)$$

$i, j=1, 2, 3$ (elemento triangular linear) ou

$i, j=1, 2, 3, \dots, 6$ (elemento triangular quadrático)

onde ϕ_j denota a função de forma, ϕ_i o peso e Ω_e , Γ_e correspondem à superfície e ao contorno do elemento e . De fato, Γ_e são as três arestas do triângulo mestre, cujos operadores atuarão ao longo destes contornos (ver Fig. 2.4), que compreendem $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, e $3 \rightarrow 1$.

As integrais (3.2) e (3.3) serão salvas no formato MATLAB para os arquivos S1.m e S2.m, respectivamente. No primeiro arquivo, a matriz é calculada para o caso de elementos lineares, ao passo que, para o segundo caso, os elementos são quadráticos. O conteúdo destes arquivos está mostrado, na íntegra ou parcialmente, a seguir:

%Differentiation of Fi-j with respect x	%Differentiation of Fi-i with respect x
%multiplied by	%multiplied by
%Differentiation of Fi-i with respect y	%Differentiation of Fi-j with respect y

```

S1(1,1)=1/4*(-y3+y2)/Ae*(x3-x2);
S1(1,2)=1/4*(-y1+y3)/Ae*(x3-x2);
S1(1,3)=1/4*(y1-y2)/Ae*(x3-x2);
S1(2,1)=1/4*(-y3+y2)/Ae*(x1-x3);
S1(2,2)=1/4*(-y1+y3)/Ae*(x1-x3);
S1(2,3)=1/4*(y1-y2)/Ae*(x1-x3);
S1(3,1)=1/4*(-y3+y2)/Ae*(-x1+x2);
S1(3,2)=1/4*(-y1+y3)/Ae*(-x1+x2);
S1(3,3)=1/4*(y1-y2)/Ae*(-x1+x2);

S2(1,1)=-1/4*(-y3+y2)*(-x3+x2)/Ae;
S2(1,2)=-1/12*(x1-x3)*(-y3+y2)/Ae;
S2(1,3)=1/12*(-y3+y2)*(x1-x2)/Ae;
.
.
.
S2(6,4)=1/3*(2*y1*x1-y1*x3-y3*x1-y2*x1+y2*x3-y1*x2+y3*x2)/Ae;
S2(6,5)=1/3*(-y1*x3+y1*x2-y3*x1+2*y3*x3-y3*x2+y2*x1-y2*x3)/Ae;
S2(6,6)=-1/3*(2*y1*x1-y1*x3-y2*x1-y2*x3-y1*x2-y3*x1-
y3*x2+2*y3*x3+2*y2*x2)/Ae;

```

Listagem 3.1. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo das Equações (3.2) e (3.3).

onde Ae corresponde à área do elemento considerado. Para estes exemplos x_i e y_i ($i=1, 2, 3$) são as coordenadas x e y do elemento e . Para o caso do elemento triangular quadrático, os resultados são apenas parcialmente mostrados.

Do exposto acima, nota-se o cabeçalho comentado em ambos os arquivos, descrevendo as operações realizadas. Outro ponto, ressaltado anteriormente, é o nome das matrizes, o mesmo dos arquivos salvos, que, no caso, foram S1.m e S2.m.

Para as matrizes expressas em (3.4) e (3.5), os arquivos serão salvos como S3.f e S4.c, respectivamente, exemplificando a exportação nos formatos FORTRAN e C. Ambas matrizes foram calculadas para aproximações lineares.

```

!Differentiation of Fi-i with respect x      //Differentiation of Fi-i with respect y
!multiplied by                               //multiplied by
!Differentiation of Fi-j with respect x      //Differentiation of Fi-j with respect y

S3(1,1) = (-y3+y2)**2/Ae/4
S3(1,2) = -(-y3+y2)*(y1-y3)/Ae/4
S3(1,3) = (-y3+y2)/Ae*(y1-y2)/4
S3(2,1) = -(-y3+y2)*(y1-y3)/Ae/4
S3(2,2) = (y1-y3)**2/Ae/4
S3(2,3) = -(y1-y3)*(y1-y2)/Ae/4
S3(3,1) = (-y3+y2)/Ae*(y1-y2)/4
S3(3,2) = -(y1-y3)*(y1-y2)/Ae/4
S3(3,3) = (y1-y2)**2/Ae/4

S4[0][0] = pow(x3-x2,2.0)/Ae/4.0;
S4[0][1] = (x3-x2)/Ae*(x1-x3)/4.0;
S4[0][2] = (x3-x2)/Ae*(-x1+x2)/4.0;
S4[1][0] = (x3-x2)/Ae*(x1-x3)/4.0;
S4[1][1] = pow(x1-x3,2.0)/Ae/4.0;
S4[1][2] = (x1-x3)/Ae*(-x1+x2)/4.0;
S4[2][0] = (x3-x2)/Ae*(-x1+x2)/4.0;
S4[2][1] = (x1-x3)/Ae*(-x1+x2)/4.0;
S4[2][2] = pow(-x1+x2,2.0)/Ae/4.0;

```

Listagem 3.2. Código fonte em padrão Fortran e C para o cálculo das Equações (3.4) e (3.5).

Para exemplificar as integrais de linha, será considerada (3.6), com aproximação linear e salvas no arquivo *L1.m*.

```

%Differentiation of Fi-j with respect x
%multiplied by
%Fi-i

```

```

L1_12(1,1)=1/4*h12/Ae*(-y3+y2);      L1_23(1,1)=0;                        L1_31(1,1)=1/4*h31/Ae*(-y3+y2);
L1_12(1,2)=1/4*h12/Ae*(-y1+y3);      L1_23(1,2)=0;                        L1_31(1,2)=1/4*h31/Ae*(-y1+y3);
L1_12(1,3)=1/4*h12/Ae*(y1-y2);        L1_23(1,3)=0;                        L1_31(1,3)=1/4*h31/Ae*(y1-y2);
L1_12(2,1)=1/4*h12/Ae*(-y3+y2);      L1_23(2,1)=1/4*h23/Ae*(-y3+y2);     L1_31(2,1)=0;
L1_12(2,2)=1/4*h12/Ae*(-y1+y3);      L1_23(2,2)=1/4*h23/Ae*(-y1+y3);     L1_31(2,2)=0;
L1_12(2,3)=1/4*h12/Ae*(y1-y2);        L1_23(2,3)=1/4*h23/Ae*(y1-y2);     L1_31(2,3)=0;
L1_12(3,1)=0;                        L1_23(3,1)=1/4*h23/Ae*(-y3+y2);     L1_31(3,1)=1/4*h31/Ae*(-y3+y2);
L1_12(3,2)=0;                        L1_23(3,2)=1/4*h23/Ae*(-y1+y3);     L1_31(3,2)=1/4*h31/Ae*(-y1+y3);
L1_12(3,3)=0;                        L1_23(3,3)=1/4*h23/Ae*(y1-y2);     L1_31(3,3)=1/4*h31/Ae*(y1-y2);

```

Listagem 3.3. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo da Equação (3.6).

Para estas integrais, as variáveis $h12$, $h23$ e $h31$ correspondem ao tamanho das 3 arestas do triângulo (elemento) considerado. Os índices $_{12}$, $_{23}$ e $_{31}$ ajudam a diferenciar cada aresta.

Exemplo 2: Como uma segunda demonstração do programa, será introduzido um caso inédito e complicado, necessário na formulação de uma tese de doutorado do grupo [29]. Sem delongas e rigores matemáticos, a seguir são mostradas duas das matrizes elementares utilizadas naquela situação,

$$S1_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} x \frac{\partial \{\phi_j\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\phi_i\}}{\partial y} dx dy \quad (3.8)$$

$$S2_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} x \{\phi_j\}^T \{\phi_i\} dx dy \quad (3.9)$$

Para se ter idéia da complexidade destas matrizes elementares, deve-se observar o caso expresso por (3.8): cada operação diferencial, em x ou y , resulta em duas integrais no domínio (ξ, η) , enumerando um total de 4 integrais. De (2.17), nota-se que x deve ser particionado, para o caso 2D, em 3 parcelas ($x_1 * L_1 + x_2 * L_2 + x_3 * L_3$) o que totalizaria, caso alguém realizasse esse cálculo manualmente com aproximações lineares, em 12 integrais duplas, onde cada integral geraria uma matriz 3x3, e, para o caso quadrático, 12 integrais, mas com cada uma sendo uma matriz 6x6. De fato, naquela ocasião, o então aluno e autor de [32], bem como alguns colegas de trabalho, tentaram exaustivamente achar as devidas respostas, mas infelizmente todos apresentavam resultados diferentes, e, por tratar-se de uma formulação inédita, precisava-se de certeza absoluta para verificar possíveis outros equívocos de programação.

Aliado a isso, existe o fato dessa integral não estar tabelada, nem ser encontrada na literatura; desta forma, o NODAL23D mostrou-se, mais uma vez, como uma grande saída para exemplos complicados (e práticos) como estes. O resultado está ilustrado a seguir, para o formato .C:

```
//X
//multiplied by
//Differentiation of Fi-j with respect x
//multiplied by
//Differentiation of Fi-i with respect y

S1[0][0] = -(-y3+y2)*(-x3+x2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[0][1] = (y1-y3)*(-x3+x2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[0][2] = (-y1+y2)*(-x3+x2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[1][0] = (x1-x3)*(-y3+y2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[1][1] = -(x1-x3)*(y1-y3)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[1][2] = -(x1-x3)*(-y1+y2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[2][0] = -(x1-x2)*(-y3+y2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[2][1] = (x1-x2)*(y1-y3)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
S1[2][2] = (x1-x2)*(-y1+y2)*(x1+x3+x2)/Ae/12.0;
```

Listagem 3.4. Código fonte em padrão C para o cálculo da Equação (3.8).

Na Equação (3.9), o resultado encontra-se, na íntegra, como mostrado em seguida, levando em conta aproximações quadráticas, no formato .C:

```
//Fi-i
//multiplied by
//Fi-j
//multiplied by
//X

S2[0][0] = Ae*(5.0*x1+x3+x2)/210.0;
S2[0][1] = -Ae*(4.0*x1-x3+4.0*x2)/1260.0;
S2[0][2] = -Ae*(4.0*x1+4.0*x3-x2)/1260.0;
S2[0][3] = Ae*(3.0*x1-x3-2.0*x2)/315.0;
S2[0][4] = -Ae*(x1+3.0*x3+3.0*x2)/315.0;
S2[0][5] = Ae*(3.0*x1-2.0*x3-x2)/315.0;
S2[1][0] = -Ae*(4.0*x1-x3+4.0*x2)/1260.0;
S2[1][1] = Ae*(x1+x3+5.0*x2)/210.0;
S2[1][2] = Ae*(x1-4.0*x3-4.0*x2)/1260.0;
S2[1][3] = -Ae*(2.0*x1+x3-3.0*x2)/315.0;
S2[1][4] = -Ae*(x1+2.0*x3-3.0*x2)/315.0;
S2[1][5] = -Ae*(3.0*x1+3.0*x3+x2)/315.0;
S2[2][0] = -Ae*(4.0*x1+4.0*x3-x2)/1260.0;
S2[2][1] = Ae*(x1-4.0*x3-4.0*x2)/1260.0;
S2[2][2] = Ae*(x1+x2+5.0*x3)/210.0;
S2[2][3] = -Ae*(3.0*x1+x3+3.0*x2)/315.0;
S2[2][4] = -Ae*(x1-3.0*x3+2.0*x2)/315.0;
S2[2][5] = -Ae*(2.0*x1-3.0*x3+x2)/315.0;

S2[3][0] = Ae*(3.0*x1-x3-2.0*x2)/315.0;
S2[3][1] = -Ae*(2.0*x1+x3-3.0*x2)/315.0;
S2[3][2] = -Ae*(3.0*x1+x3+3.0*x2)/315.0;
S2[3][3] = 8.0/315.0*Ae*(3.0*x1+x3+3.0*x2);
S2[3][4] = 4.0/315.0*Ae*(2.0*x1+2.0*x3+3.0*x2);
S2[3][5] = 4.0/315.0*Ae*(3.0*x1+2.0*x3+2.0*x2);
S2[4][0] = -Ae*(x1+3.0*x3+3.0*x2)/315.0;
S2[4][1] = -Ae*(x1+2.0*x3-3.0*x2)/315.0;
S2[4][2] = -Ae*(x1-3.0*x3+2.0*x2)/315.0;
S2[4][3] = 4.0/315.0*Ae*(2.0*x1+2.0*x3+3.0*x2);
S2[4][4] = 8.0/315.0*Ae*(x1+3.0*x3+3.0*x2);
S2[4][5] = 4.0/315.0*Ae*(2.0*x1+3.0*x3+2.0*x2);
S2[5][0] = Ae*(3.0*x1-2.0*x3-x2)/315.0;
S2[5][1] = -Ae*(3.0*x1+3.0*x3+x2)/315.0;
S2[5][2] = -Ae*(2.0*x1-3.0*x3+x2)/315.0;
S2[5][3] = 4.0/315.0*Ae*(3.0*x1+2.0*x3+2.0*x2);
S2[5][4] = 4.0/315.0*Ae*(2.0*x1+3.0*x3+2.0*x2);
S2[5][5] = 8.0/315.0*Ae*(3.0*x1+3.0*x3+x2);
```

Listagem 3.5. Código fonte em padrão C para o cálculo da Equação (3.9).

3.2. EDGE2D

Na seção anterior, mostrou-se a utilização do programa NODAL23D, que utiliza uma formulação nodal. Nesta seção, será discutida a formulação com elementos de aresta. Neste caso, toda a teoria do MEF é a mesma comentada no capítulo anterior, como a definição dos operadores diferenciais, a aplicação do Método de Galerkin, a discretização da função peso, e a transformação de coordenadas envolvidas.

Do ponto de vista da programação, ao se trabalhar com elementos de aresta, deve-se apenas modificar as definições das funções de base e peso expressas em (2.20) para os casos 2D e 3D, respectivamente. Essas novas definições serão mostradas a seguir.

A principal diferença entre a formulação nodal e a formulação baseada em elementos de aresta, está no fato de que, na nodal, as incógnitas são, por natureza, representações escalares das incógnitas, ao passo que na formulação com elementos de aresta elas são vetoriais. De fato, pode-se ainda acrescentar, para o caso específico do eletromagnetismo, alguns outros pontos que estarão devidamente comentados mais adiante.

Ao se trabalhar com elementos finitos nodais em eletromagnetismo com mais de uma componente de campo (seja elétrico ou magnético), por exemplo, deve-se ser cauteloso. Mais claramente, das Equações de Maxwell, os componentes de campo, elétrico ou magnético, devem satisfazer às condições de divergência:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon E) &= \rho \\ \nabla \cdot (\mu H) &= 0\end{aligned}\quad (3.10)$$

Ao se trabalhar com três componentes de campo elétrico, E_x , E_y e E_z , e simplesmente definí-las nos nós de um elemento triangular ou tetraédrico, as condições de (3.10) não seriam satisfeitas, pois nada as impõem explicitamente. O resultado é a distorção do espaço nulo, gerando os chamados modos espúrios [27].

De fato, foi verificado que se as funções de base não impusessem continuidade completa entre dois elementos, i.e., possuísse continuidade apenas dos componentes tangenciais, deixando o componente normal livre, esta distorção do espaço nulo existiria [33]-[34].

Uma outra dificuldade da formulação nodal é a imposição das condições de contorno em fronteiras que não coincidam com os eixos ortogonais, fazendo com que se tenha de relacionar dois ou mais componentes de campo, complicando o esquema de armazenamento das matrizes. Em outras palavras, se a janela de truncamento do domínio computacional for circular, ao invés de retangular, ter-se-ia dificuldade em impor condições de campo **tangencial** nulo, em função dos componentes E_x ou E_y , por exemplo.

Com os motivos acima expostos, faz-se necessária a utilização de funções de base vetoriais que, entre outras características, não imponham a continuidade do componente normal de campo. Dentre estas formulações, uma bastante recorrida é a de elementos de aresta.

Ao considerar elementos de aresta pode-se manter todo o procedimento descrito no capítulo anterior, definindo-se apenas os novos operadores, \vec{N} , em função das antigas coordenadas de área.

Ao contrário da formulação nodal, onde todos os componentes eram alocados sobre os nós do triângulo, nos elementos de aresta, de ordem mista, as representações dos componentes dos campos são ligeiramente diferentes. De fato, na Fig. 3.6 estão colocadas as descrições dos componentes tangencial e normal, expressas como \vec{N} e ϕ , respectivamente.

Implicitamente, esta formulação acaba com o problema de modos espúrios, e é bastante utilizada em problemas no campo de óptica e microondas, quando o domínio de discretização é bidimensional, além de poder trabalhar com três componentes de campo, sem requerer uma duplicação ou triplicação do sistema matricial.

Da Fig. 3.6, nota-se que, nesta situação, estão definidos três componentes de campo. \vec{N} sendo uma entidade vetorial, definida ao longo das arestas do triângulo, implicitamente descreve os componentes x e y do campo. Ao passo que o componente z do campo é descrito, nos nós do triângulo, por ϕ , e não requer notação vetorial, por tratar de apenas um componente.

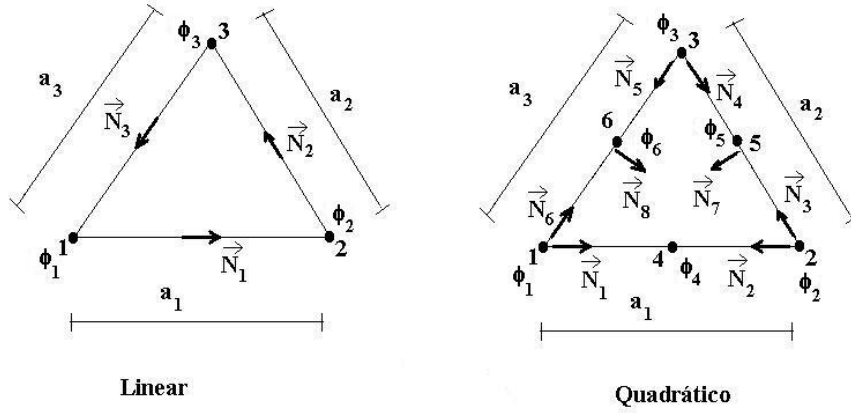


Fig. 3.6. Indicação das incógnitas considerando formulação mista, com elementos de aresta e nodal, em 2D.

As funções descritas na Fig. 3.6 são de ordem mista, baseadas nas arestas e nós do triângulo, estando mostradas suas aproximações lineares e quadráticas na primeira e segunda coluna, respectivamente, para o caso bidimensional.

$$\left\{ \begin{matrix} \phi \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad \left\{ \phi \right\} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_3L_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left\{ \vec{N} \right\} = \begin{bmatrix} a_1(L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1) \\ a_2(L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2) \\ a_3(L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3) \end{bmatrix} \quad \left\{ \vec{N} \right\} = \begin{bmatrix} a_1L_1\nabla L_2 \\ a_1L_2\nabla L_1 \\ a_2L_2\nabla L_3 \\ a_2L_3\nabla L_2 \\ a_3L_3\nabla L_1 \\ a_3L_1\nabla L_3 \\ 4(L_2L_3\nabla L_1 - L_1L_2\nabla L_3) \\ 4(L_1L_3\nabla L_2 - L_1L_2\nabla L_3) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

À exceção do significado e localização das incógnitas, todo o resto do processo de integração, transformação linear, integrando, etc., inclusive a definição das coordenadas de área, L , permanecem idênticos; assim, pode-se considerar a mesma descrição feita no capítulo anterior.

Àqueles que não estão familiarizados com o MEF, aconselha-se fortemente a leitura do Capítulo 2, por uma questão de entendimento. Se este não for o caso, o que foi acima explicado, juntamente com os exemplos citados mais adiante, serão suficientes para o simples entendimento do EDGE2D e suas funcionalidades. A seguir está mostrado o programa de montagem das MEs e suas funcionalidades.

Do ponto de vista do usuário, a interface do EDGE2D (*EDGE 2-Dimension*) é bem semelhante à do NODAL23D. Entre seus pontos comuns, podem-se citar as

características da última linha de comando; a interface *point and click*; as mensagens indicando erros ou fim de montagem das MEs; a exportação das mesmas em três tipos diferentes de formatos (C, FORTRAN e MATLAB), etc.

Sua interface básica está mostrada na Fig. 3.7, onde deve-se ressaltar algumas diferenças. Conforme expresso pela Fig. 3.7, observa-se que, agora, existem tanto operadores vetoriais como escalares. Isto torna-se evidente pela explicação dada anteriormente, na qual a formulação mista considera as variáveis vetoriais tangenciais nas arestas do triângulo, ao passo que as incógnitas escalares tornam-se as normais nos nós. Sendo assim, pode-se definir, então, as operações vetoriais e escalares mais comuns, inclusive rotacional e gradiente.

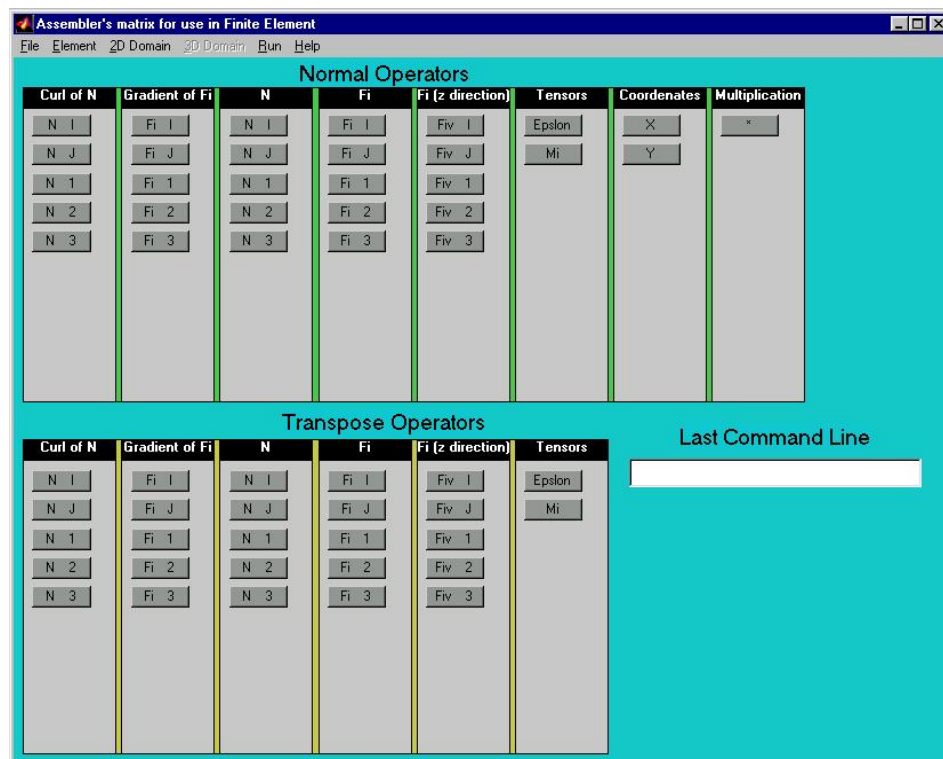


Fig. 3.7. Apresentação inicial do EDGE2D.

Outro detalhe é que, de (3.11), percebe-se que, para as aproximações quadráticas, existe uma diferença de tamanho das funções de base \vec{N} e ϕ . Para as componentes tangenciais, \vec{N} , existe uma alocação para 8 variáveis definidas nas arestas, ao passo que, em ϕ , estes são apenas 6. A consequência direta disto é o rigor matemático que deve-se ter ao aplicar o produto interno, pois pode-se obter uma matriz

6x8 ou 8x6 para aproximações quadráticas, por exemplo. Desta forma, teve-se que definir, também, os operadores transpostos, expressos na segunda sequência de comandos. No caso do NODAL23D isto não foi necessário, uma vez que as funções de forma e de peso eram sempre do mesmo tipo, o que não obrigatoriamente acontece aqui. Mais adiante, isto ficará claro.

Exemplo 3: A formulação aqui descrita foi desenvolvida para análise de guias de ondas em geral, estando bastante detalhada em [26]-[27], consistindo da equação:

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times E) - k_0^2 \varepsilon_r E = 0, \quad (3.12)$$

onde $\mu_r = \mu_{xx} \vec{x} \vec{x} + \mu_{xy} \vec{x} \vec{y} + \mu_{xz} \vec{x} \vec{z} + \mu_{yx} \vec{y} \vec{x} + \mu_{yy} \vec{y} \vec{y} + \mu_{yz} \vec{y} \vec{z} + \mu_{zx} \vec{z} \vec{x} + \mu_{zy} \vec{z} \vec{y} + \mu_{zz} \vec{z} \vec{z}$ e $\varepsilon_r = \varepsilon_{xx} \vec{x} \vec{x} + \varepsilon_{xy} \vec{x} \vec{y} + \varepsilon_{xz} \vec{x} \vec{z} + \varepsilon_{yx} \vec{y} \vec{x} + \varepsilon_{yy} \vec{y} \vec{y} + \varepsilon_{yz} \vec{y} \vec{z} + \varepsilon_{zx} \vec{z} \vec{x} + \varepsilon_{zy} \vec{z} \vec{y} + \varepsilon_{zz} \vec{z} \vec{z}$ são os tensores de permissividade magnética e elétrica, respectivamente, e k_0 é o número de onda no vácuo. A equação acima gera 13 matrizes elementares, mas para ser breve e ilustrar a eficiência do EDGE2D mostrar-se-á, a seguir, apenas 3 destas matrizes.

$$\begin{aligned} G1 &= \iint \nabla \times \vec{N}_i \cdot (P * \nabla_i \phi_j) dS \\ G2 &= \iint \nabla \times \vec{N}_i \cdot (P * \nabla \times \vec{N}_j) dS \\ G3 &= \iint (\phi_i)_{\vec{z}} \cdot (P * \vec{N}_j) dS, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde P é um tensor com estrutura semelhante a μ e ε .

Para as equações acima, gerou-se G1 e G2 nos arquivos ROTGRA.m e ROTROT.m, respectivamente, considerando aproximação linear para as funções de base e peso. O resultado está mostrado a seguir.

```
%Curl of N(i)
%multiplied by
%Tensor P
%multiplied by
%Gradient of Fi(j) Transposed

ROTGRAD(1,1)=1/4*a1*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(-Pzy*y3+Pzy*y2-Pzx*x3+Pzx*x2)/Ae^2;
ROTGRAD(1,2)=-1/4*a1*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y3+Pzx*x1-Pzx*x3)/Ae^2;
ROTGRAD(1,3)=1/4*a1*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y2+Pzx*x1-Pzx*x2)/Ae^2;
ROTGRAD(2,1)=1/4*a2*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(-Pzy*y3+Pzy*y2-Pzx*x3+Pzx*x2)/Ae^2;
ROTGRAD(2,2)=-1/4*a2*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y3+Pzx*x1-Pzx*x3)/Ae^2;
ROTGRAD(2,3)=1/4*a2*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y2+Pzx*x1-Pzx*x2)/Ae^2;
ROTGRAD(3,1)=1/4*a3*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(-Pzy*y3+Pzy*y2-Pzx*x3+Pzx*x2)/Ae^2;
ROTGRAD(3,2)=-1/4*a3*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y3+Pzx*x1-Pzx*x3)/Ae^2;
ROTGRAD(3,3)=1/4*a3*(-x1*y3-x2*y1+x2*y3+y1*x3+y2*x1-y2*x3)*(Pzy*y1-Pzy*y2+Pzx*x1-Pzx*x2)/Ae^2;
```

```

%Curl of N(i)
%multiplied by
%Tensor P
%multiplied by
%Curl of N(j) Transposed

ROTROT(1,1)=1/4/Ae^3*a1^2*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz;
ROTROT(1,2)=1/4/Ae^3*a1*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a2;
ROTROT(1,3)=1/4/Ae^3*a3*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a1;
ROTROT(2,1)=1/4/Ae^3*a1*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a2;
ROTROT(2,2)=1/4/Ae^3*a2^2*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz;
ROTROT(2,3)=1/4/Ae^3*a3*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a2;
ROTROT(3,1)=1/4/Ae^3*a3*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a1;
ROTROT(3,2)=1/4/Ae^3*a3*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz*a2;
ROTROT(3,3)=1/4/Ae^3*a3^2*(-y1*x2-y3*x1+y3*x2+y1*x3+y2*x1-y2*x3)^2*Pzz;

```

Listagem 3.6. Código fonte em padrão Matlab para o cálculo das matrizes G1 e G2 da Equação (3.13).

Já para o terceiro caso, G3, a matriz será salva no formato FORTRAN, com aproximação quadrática no arquivo FIN.f. Na listagem 3.7, o resultado está mostrado na integra.

```

!Fi(i) VECTORIAL
!multiplied by
!Tensor P
!multiplied by
!VECTOR N(j) Tranposed

FIN(1,1) = a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/60
FIN(1,2) = -a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/120
FIN(1,3) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/120
FIN(1,4) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/120
FIN(1,5) = -a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/120
FIN(1,6) = -a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/60
FIN(1,7) = -Pzy*x3/90-Pzx*y2/90+Pzx*y3/90+Pzy*x2/90
FIN(1,8) = 0
FIN(2,1) = -a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/120
FIN(2,2) = a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/60
FIN(2,3) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/60
FIN(2,4) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/120
FIN(2,5) = -a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/120
FIN(2,6) = a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/120
FIN(2,7) = 0
FIN(2,8) = Pzx*y1/90-Pzx*y3/90-Pzy*x1/90+Pzy*x3/90
FIN(3,1) = -a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/120
FIN(3,2) = -a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/120
FIN(3,3) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/120
FIN(3,4) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/60
FIN(3,5) = a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/60
FIN(3,6) = a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/120
FIN(3,7) = Pzx*y1/90-Pzx*y2/90-Pzy*x1/90+Pzy*x2/90
FIN(3,8) = Pzx*y1/90-Pzx*y2/90-Pzy*x1/90+Pzy*x2/90
FIN(4,1) = a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/15
FIN(4,2) = a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/15
FIN(4,3) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/15
FIN(4,4) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/30
FIN(4,5) = a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/30

```

```

FIN(4,6) = -a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/15
FIN(4,7) = -4.E0/45.E0*Pzx*y1-2.E0/45.E0*Pzx*y3+4.E0/45.E0*Pzy*x1+2.E0/45.E0*Pzy*x3+2.E0/15.E0*Pzx*y2-
2.E0/15.E0*Pzy*x2
FIN(4,8) = -2.E0/15.E0*Pzx*y1+2.E0/45.E0*Pzx*y3+4.E0/45.E0*Pzx*y2+2.E0/15.E0*Pzy*x1-2.E0/45.E0*Pzy*x3-
4.E0/45.E0*Pzy*x2
FIN(5,1) = a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/30
FIN(5,2) = a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/15
FIN(5,3) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/15
FIN(5,4) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/15
FIN(5,5) = a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/15
FIN(5,6) = -a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/30
FIN(5,7) = -2.E0/45.E0*Pzx*y1-4.E0/45.E0*Pzx*y3+2.E0/45.E0*Pzy*x1+4.E0/45.E0*Pzy*x3+2.E0/15.E0*Pzx*y2-
2.E0/15.E0*Pzy*x2
FIN(5,8) = -4.E0/45.E0*Pzx*y1+2.E0/45.E0*Pzx*y3+2.E0/45.E0*Pzx*y2+4.E0/45.E0*Pzy*x1-2.E0/45.E0*Pzy*x3-
2.E0/45.E0*Pzy*x2
FIN(6,1) = a1*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/15
FIN(6,2) = a1*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/30
FIN(6,3) = -a2*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/30
FIN(6,4) = a2*(-Pzx*y1+Pzx*y3+Pzy*x1-Pzy*x3)/15
FIN(6,5) = a3*(Pzy*x3+Pzx*y2-Pzx*y3-Pzy*x2)/15
FIN(6,6) = -a3*(-Pzx*y1+Pzx*y2+Pzy*x1-Pzy*x2)/15
FIN(6,7) = -2.E0/45.E0*Pzx*y1-2.E0/45.E0*Pzx*y3+2.E0/45.E0*Pzy*x1+2.E0/45.E0*Pzy*x3+4.E0/45.E0*Pzx*y2-
4.E0/45.E0*Pzy*x2
FIN(6,8) = -2.E0/15.E0*Pzx*y1+2.E0/45.E0*Pzx*y2+2.E0/15.E0*Pzy*x1-2.E0/45.E0*Pzy*x2+4.E0/45.E0*Pzx*y3-
4.E0/45.E0*Pzy*x3

```

Listagem 3.7. Código fonte em padrão Matlab para o cálculos da matriz G3 da Equação (3.13).

Basicamente, a principal diferença entre os programas NODAL23D e EDGE2D é a complexidade. Conforme pode-se observar, a formulação com elementos de aresta é mais complexa e requer mais atenção e operadores, o que afeta diretamente as MEs. Uma consequência direta da complexidade das matrizes, é o tempo gasto para que o programa retorne, na tela, os resultados.

Certamente, ao contrário do NODAL23D e MNT23D, este é o programa mais lento dos três, muito embora, de um total de 13 matrizes geradas, apenas duas excederam o tempo de 2 minutos para serem apresentadas na tela de um microcomputador AMD/K6-2, de 500 MHz de *clock* e 128 MB de memória RAM.

É importante ressaltar que, ao contrário da formulação nodal, onde alguns livros disponibilizam a MEs mais triviais [13],[16],[31], nenhum destes coloca explicitamente a mais simples das MEs usando formulação com elementos de aresta, devido à sua enorme complexidade.

Percebe-se o que foi dito acima, a partir do Exemplo 3, pois fica patente o grau de complexidade. Por motivo de brevidade, não foram aqui expostas todas as matrizes elementares (totalizando um número de 13) geradas pelo programa, muito embora todas tenham sido testadas e conferidas em na tese de doutorado [27], através de

simples programas implementados em Fortran e Matlab, bem como simulações reais de dispositivos. Na ocasião, foram testadas tanto as aproximações quadráticas como lineares, resultando, assim, numa maior credibilidade do EDGE2D, explicitando o potencial desta ferramenta na resolução e montagem de matrizes elementares altamente complexas.

3.3. MNT23D

Com o progresso contínuo nos processadores e memória dos computadores, bem como a constante descoberta de novas condições de fronteira e formulações, o MEF têm-se mostrado cada vez mais uma ferramenta em potencial para modelagem em engenharia elétrica (óptica, microondas, sistemas de potência, etc.), civil (estruturas prediais, pontes, etc.) e mecânica (funcionamento de motores e turbinas).

Nesses sistemas, os modelos matemáticos envolvidos, por mais complexo que sejam, possuem algumas características em comum. De fato, muitas vezes as equações diferenciais que os regem possuem alguns operadores vetoriais e/ou escalares em comum, que lhes garante a possibilidade de uso de uma ferramenta única para manipulação vetorial.

Dentro desta linha, de operadores vetoriais e escalares, é que o MNT23D consegue montar e manipular tais operadores, para verificação de cálculos algébricos por parte do usuário ou de entrega imediata para o NODAL23D, que irá calcular diretamente as MEs, entregando-as para um programa, numa determinada linguagem de programação, em elementos finitos.

Na Seção 3.1 foi mostrada a utilização do programa NODAL23D, para montagem de MEs no MEF com formulação nodal. Contudo, ainda no Capítulo 2, pôde-se verificar que, antes de se montar tais matrizes, havia todo um processo partindo da equação original do problema, e seguindo as etapas de aplicação do produto interno e a discretização desses operadores, para finalmente isolar as ME's. Enfim, antes de se chegar à definição e isolamento das MEs, existe todo um processo algébrico, muitas vezes complicado, que demanda tempo e facilmente propicia erros quando formalismos vetoriais e diferentes tipos de anisotropia estão envolvidos [15], [27], [28].

Sendo assim, estes foram alguns dos motivos que levaram a desenvolver o MNT23D. Com ele é possível partir do nível mais alto do processo descritivo do MEF, ou seja, escrever diretamente as equações que regem o problema físico, aplicar Galerkin, e incluir as características dos meios materiais envolvidos.

Os resultados são expressões explícitas, contendo as MEs anteriormente estudadas na Seção 3.1, mas de maneira mais completa, onde agora o usuário tem a liberdade/comodidade de incorporar tais resultados diretamente em alguma linguagem de programação.

Dos parágrafos anteriores, pode-se facilmente associar o uso conjunto do MNT23D e o NODAL23D, por ambos usarem formulação nodal. Todavia, uma outra utilização interessante deste novo programa é simplesmente a manipulação de operadores vetoriais para proposição de novos formalismos. Naqueles grupos de trabalho onde desenvolvem-se ferramentas em elementos finitos, é comum este tipo de abordagem no MEF, ou seja, tentar buscar sempre melhores algoritmos e formalismos vetoriais mais completos para melhorar as ferramentas numéricas de trabalho, sendo assim o MNT23D uma maneira alternativa de conferir resultados parciais.

É comum refazer-se as mesmas expressões duas ou três vezes para nos garantir sobre a exatidão das mesmas. Desta forma, o uso do MNT23D (*MouNTing nodal 2-3Dimensions*) garante uma manipulação de maneira exata, poupando tempo de refazer toda a álgebra duas ou três vezes, sem duvidar dos resultados, através de uma manipulação simbólica propiciada pelo Matlab.

Para facilitar o uso do programa, os operadores estão separados em algumas subclasses, podendo o usuário escolhê-los e montá-los através de uma interface também *point and click*. Na Tabela 3.1, estão ilustradas as seguintes operações que encontram-se disponíveis.

Operadores Vetoriais	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla} & \vec{\nabla} & \vec{\nabla} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ OP_x & OP_y & OP_z \end{array}$	Nabla x ____	Curl of	Rotacional de OP

$\frac{\partial(OP_x)}{\partial x} + \frac{\partial(OP_y)}{\partial y} + \frac{\partial(OP_z)}{\partial z}$	Nabla . ____	Divergent of	Divergente de OP
$\frac{\partial(OP)}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial(OP)}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial(OP)}{\partial z} \vec{z}$	Nabla ____	Gradient of	Gradiente de OP
$\begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ OP_x & OP_y & OP_z \end{vmatrix}$	Nabla{T} x ____	Transverse curl of	Rotacional transversal de OP
$\frac{\partial(OP_x)}{\partial x} + \frac{\partial(OP_y)}{\partial y}$	Nabla{T}. ____	Transverse divergent of	Divergente transversal de OP
$\frac{\partial(OP)}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial(OP)}{\partial y} \vec{y}$	Nabla{T} ____	Transverse gradient of	Gradiente transversal de OP
Vetores unitários	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
\vec{x}	a_x	Unit vector in x direction (a_x)	Vetor unitário na direção x
\vec{y}	a_y	Unit vector in y direction (a_y)	Vetor unitário na direção y
\vec{z}	a_z	Unit vector in z direction (a_z)	Vetor unitário na direção z
\vec{n}	n- normal vector	Unit vector in the normal direction	Vetor unitário normal
Campos	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
$\vec{\varphi}_j x$	Field x-direction	Field_x	Campo na direção x
$\vec{\varphi}_j y$	Field y-direction	Field_y	Campo na direção y
$\vec{\varphi}_j z$	Field z-direction	Field_z	Campo na direção z
$\vec{\varphi}_T T$	Field t-direction	Field_t	Campo na direção transversal (x,y)
$\vec{\varphi}_i x$	Weight x-direction	Weight_x	Função peso na direção x
$\vec{\varphi}_i y$	Weight y-direction	Weight_y	Função peso na direção y
$\vec{\varphi}_i z$	Weight z-direction	Weight_z	Função peso na direção z
$\vec{\omega}_T T$	Weight t-direction	Weight _t	Função peso na direção transversal (x,y)
Operações gerais	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
-	Minus	Minus	Efetua uma diferença
*	Multiplied by	Multiplied by	Efetua uma multiplicação
Produto interno	Inner product of	Inner product of	Efetua um produto

Produto vetorial	Vectorial product of	Vectorial product of	interno Realiza um produto vetorial
Transposto	Transposed	Transposed	Tira o transposto do tensor
E	And	And	Ligação para operações gerais
E (Produto interno)	And of inner product	And	Ligação para o produto interno
Constantes gerais	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
A	A	A	Constante genérica A
B	B	B	Constante genérica B
C	C	C	Constante genérica C
D	D	D	Constante genérica D
Tensores	Notação no programa	Descrição no programa	Significado
$\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix}$	K – Full tensor 3x3	K	Tensor completo 3x3
$\begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	K_tt – Transverse tensor	K_tt	Tensor 3x3 com componentes transversais apenas
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix}$	K_zz – Axial tensor	K_zz	Tensor 3x3 com componente axial

Tabela 3.1. Comandos do MNT23D.

A tabela anterior apresenta todos os operadores vetoriais definidos no programa. Nota-se que todas as operações estão divididas em seis classes: *Operadores vetoriais*, *Vetores unitários*, *Campos*, *Operações gerais*, *Constantes gerais* e *Tensores*. A segunda coluna da tabela denota a notação apresentada visualmente no programa; a terceira, o conteúdo a ser mostrado ao usuário quando este salvar tal operador em arquivo; e, finalmente, a quarta serve para esclarecer o significado físico de tal operador.

Em *Operadores vetoriais*, tentou-se disponibilizar todas as operações envolvendo o operador nabla. Assim, estão presentes rotacional, divergente, gradiente, e suas derivações apenas em duas componentes.

Já em *Vetores unitários*, estão definidos todos os vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas, juntamente com um vetor normal unitário. Esses vetores são importantes, pois eles auxiliam em operações como produto interno, bem como podem associar uma direção a uma constante escalar.

Em *Campos* estão presentes todos os campos possíveis nas direções x , y , z e *transversal*, bem como as funções peso. Isto garante que o usuário possa colocar e fazer operações sobre todas as direções possíveis de campo e peso, tanto vetoriais como escalares. Para realização de tais operações, o usuário as define e as encontra disponíveis em *Operações gerais*. Ao necessitar de variáveis auxiliares pode-se fazer isto através de *Constantes gerais*, que introduz novas constantes.

Ao trabalhar com campos vetoriais, independente da área de atuação, é bastante comum o uso de produtos de operadores vetoriais com matrizes, ou algo parecido. Assim, finalmente, tem-se, em *Tensores*, a possibilidade e definições destes, limitados a 3×3 .

O menu principal do programa é muito simples e semelhante ao NODAL23D (ver Fig. 3.8). Ele apresenta os seguintes submenus: *File*, *Save operator*, *Run*, *Help*. Em *File* existe as opções *Export* e *Quit*. Na primeira opção, pode-se exportar o resultado para o NODAL23D que os usará para calcular as MEs incluindo as características do meio, ao passo que a segunda escolha sai do programa. A cada nova seqüência de comando, o usuário deve salvá-la usando *Save operator*, para, então, reutilizá-la em novos comandos.

Depois de definidas, todas as operações deve executar o programa através de *Run*. Se necessitar de algum esclarecimento, isso pode ser feito em *Help*. Finalmente, depois de finalizada a execução do programa, este exibe uma mensagem, e o usuário, se desejar, pode chamar o NODAL23D.

Com relação ao tempo de simulação, este programa é o mais rápido de todos, uma vez que as operações envolvidas são simples manipulações simbólicas, não excedendo, em nenhum dos casos simulados, o limite de 40 segundos, na mesma configuração de microcomputador citada anteriormente.

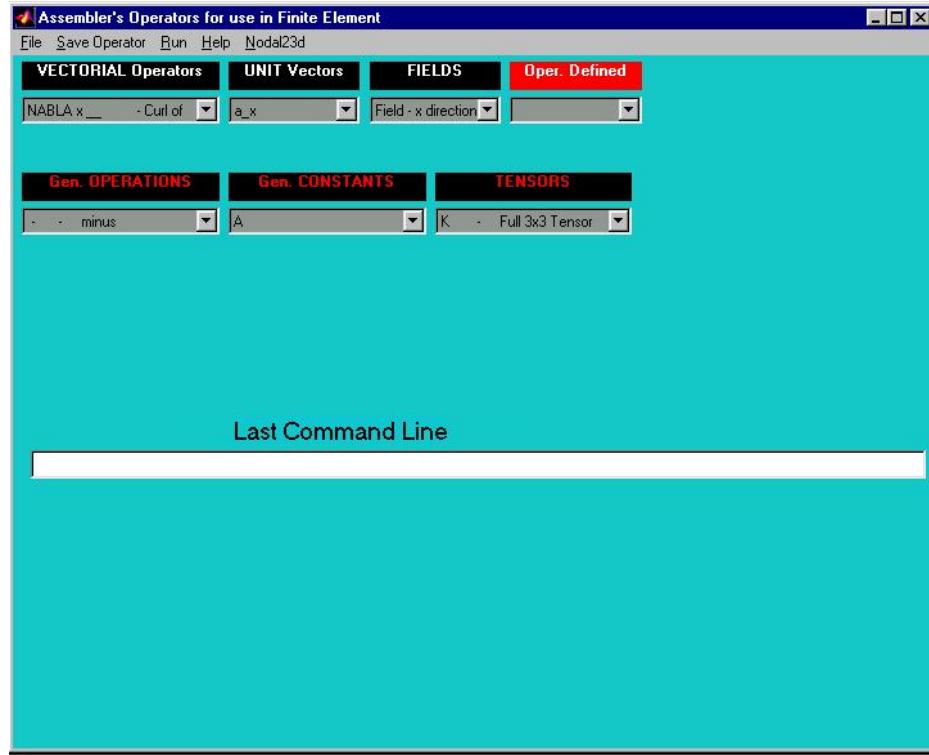


Fig. 3.8. Apresentação inicial do MNT23D.

Exemplo 4: A formulação matemática aqui descrita é a mesma de (3.1), mas escrita de outra maneira:

$$\nabla_t \times (\varepsilon_{zz}^{-1} \nabla_t \times H_t) - \vec{z} \times [\varepsilon_t^{-1} \cdot \nabla_t \times (\vec{z} \nabla_t \cdot H_t)] - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 H_t + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \gamma^2 \vec{z} \times [\varepsilon_t^{-1} \cdot (\vec{z} \times H_t)] = 0, \quad (3.14)$$

sendo todos os mesmos parâmetros de (3.1). Observando o primeiro e o terceiro termos de (3.14), percebe-se que a equação não está em sua forma enfraquecida, apresentando operadores diferenciais de segunda ordem sobre o campo. Assim, aplicando Galerkin, e fazendo algumas manipulações algébricas [28] encontra-se

$$\begin{aligned} & \iint (K_{zz} \nabla_t \times H_t) \cdot (\nabla_t \times W_t) + \oint (K_{zz} \nabla_t \times H_t) \cdot (W_t \times \vec{n}) \\ & + \iint (\nabla_t \cdot H_t)_z \cdot [(\nabla_t \times K_{tt}^T) \cdot (\vec{z} \times W_t)] + \oint \{(\nabla_t \cdot H_t)_z \times [K_{tt}^T \cdot (\vec{z} \times W_t)]\} \cdot \vec{n} \\ & - k_0^2 \iint (H_t \cdot W_t) = -\gamma^2 k_0^2 \iint \{\vec{z} \times [K_{tt} \cdot (\vec{z} \times H_t)]\} \cdot W_t, \end{aligned} \quad (3.15)$$

gerando o conjunto das seguintes integrais, mostradas a seguir:

$$S_1 = \iint (K_{zz} \nabla_t \times H_t) \cdot (\nabla_t \times W_t) \quad (3.16)$$

$$S_2 = \iint (\nabla_t \cdot H_t)_z \cdot [(\nabla_t \times K_{tt}^T) \cdot (\vec{z} \times W_t)] \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

$$(3.19)$$

$$(3.20)$$

$$(3.21)$$

onde $K_{tt} = \varepsilon_{tt}^{-1}$, $K_{zz} = \varepsilon_{zz}^{-1}$, \vec{z} é o vetor unitário na direção z e \vec{n} o vetor normal associado ao contorno. Também, de (3.15), H_t e W_t referem-se ao campo magnético H e à função peso transversais. Em [28], o Método de Galerkin foi aplicado apenas aos campos transversais. O índice t foi usado para representar as coordenadas transversais, que podem ser orientadas nas direções x ou y . Como de praxe, nas integrais assumiu-se que as características do material não mudam dentro de um elemento.

Para ilustrar os exemplos, com relação à manutenção e criação dos operadores, considerar-se-á as matrizes dadas por (3.16) e (3.17). No primeiro caso, a manipulação no MNT23D retorna algo do tipo mostrado na Listagem 3.8.

```
H_X_W_X = +kzz*dif(Fi(j),Y)*dif(Fi(i),Y)
H_X_W_Y = -kzz*dif(Fi(j),Y)*dif(Fi(i),X)
H_Y_W_X = -kzz*dif(Fi(j),X)*dif(Fi(i),Y)
H_Y_W_Y = +kzz*dif(Fi(j),X)*dif(Fi(i),X)
```

Listagem 3.8. Exemplo de expressão gerada pelo MNT23D.

Isto foi feito apenas manipulando o esquema presente na Fig. 3.8, usando os botões *pop-up*. Da listagem 3.8 deve-se notar os índices seguindo H e W . A primeira linha é o resultado da ME considerando o produto interno da componente H_x com W_x , e assim sucessivamente. Assim, percebe-se que o programa nos retorna quatro possíveis combinações (H e W são funções transversais). A palavra *dif* significa diferenciação e $Fi(i)$, $Fi(j)$ são as representações, em termo de matrizes elementares, de W e H , respectivamente. Finalmente, ainda desta listagem, percebe-se as diferenciações feitas com relação a X e Y .

No exemplo anterior mostrou-se o resultado final das expressões equivalentes das ME's, que poderiam ou não ser utilizadas por NODAL23D. Para um segundo exemplo, (3.17), mostrar-se-á como aparece um arquivo escrito depois de efetuar operações semelhantes ao caso anterior. Os resultados foram salvos no arquivo *S2.kf*,

formato este escolhido para os arquivos de saída do programa de manipulação analítica dos operadores vetoriais.

```
%          OP 1=
%      K_tt
%      Transposed
%      multiplied by
%      VECTORIAL PRODUCT of
%      unit vector in z direction (a_z)
%      AND
%      weight_t

%          OP 2=
%      TRANSVERSE CURL OF
%      OP1

%          OP 3=
%      unit vector in z direction (a_z)
%      multiplied by
%      TRANSVERSE DIVERGENT OF
%      field_t

%          OP 4=
%      INNER PRODUCT of
%      OP2
%      AND
%      OP3
H_X_W_X+=(dif(kyy*Fi(i),X)-dif(kyx*Fi(i),Y))*dif(Fi(j),X)
H_X_W_Y+=(-dif(kxy*Fi(i),X)+dif(kxx*Fi(i),Y))*dif(Fi(j),X)
H_Y_W_X+=(dif(kyy*Fi(i),X)-dif(kyx*Fi(i),Y))*dif(Fi(j),Y)
H_Y_W_Y+=(-dif(kxy*Fi(i),X)+dif(kxx*Fi(i),Y))*dif(Fi(j),Y)
```

Listagem 3.9. Exemplo de expressão gerada pelo MNT23D para a Equação (3.17).

Da Listagem 3.9, percebe-se que cada arquivo salvo no formato KF possui um cabeçalho completamente comentado nos padrões MATLAB, que descreve todas as operações realizadas, e que antecede a geração da expressão final. De fato, este cabeçalho é a manipulação passo-a-passo dos operadores, que assegura ao usuário a veracidade e conferência de suas manipulações.

Para ambos os casos ilustrados nas Listagens 3.8 e 3.9, deve-se enfatizar que as expressões finais possuem componentes transversais que, da teoria do MEF explicado no capítulo anterior, também podem ser chamadas de ME's. Entretanto, deve-se ressaltar que esta não é a forma mais comum de se definir uma ME porque, para os exemplos acima, nossos resultados consideram as características do material (k_{yy} , k_{yx} , k_{xx} , etc.). Isso também foi comentado no Capítulo 2.

Nos livros [13], [15], [16], [31], é padrão usar a definição de uma ME apenas do ponto de vista numérico, sem incorporação de nenhuma condição de contorno, característica do material, ou condição de radiação. Os autores afirmam que, se estas características mudam para cada elemento da malha, e que se um programa de elementos finitos rodar assim, produzirá resultados errôneos. Isso é verdade. Assim, o que eles unicamente chamam de MEs são as expressões semelhantes à (3.2)-(3.7), pois são matrizes com características exclusivamente matemáticas.

Todavia, aqueles que já programam em elementos finitos sabem que, ao isolar todos os termos de discretização organizadamente (como feito nas Listagens 3.8 e 3.9), já se está considerando, *a priori*, que tais características não mudam. Desta forma, tendo em vista que os programas aqui desenvolvidos têm a função básica de minimizar os custos da programação para um usuário do MEF, também denominou-se de MEs expressões mais genéricas, mas deixando claro que assume-se não existir quaisquer variações dos termos dentro de um único elemento.

Com o que foi dito nos dois últimos parágrafos, deve-se deixar claro que, com o resultado do MNT23D, o usuário tem duas opções. A primeira é que, simplesmente estando no NODAL23D, é possível importar os resultados de MNTNOD23D e calcular as MEs, ou, numa segunda opção simplesmente reescrever as MEs em sua forma mais básica (sem características materiais) no NODAL23D, verificando quais são, a partir dos resultados de MNT23D.

Para o primeiro caso, mostrar-se-á um exemplo que calcula as MEs diretamente, a partir dos resultados do MNT23D. Este exemplo será baseado na Listagem 3.9, e considera que é uma integral 2D, de SUPERFÍCIE, com ELEMENTOS LINEARES, sendo estas características, em maiúsculo, informadas interativamente durante o processo de importação de dados. Os resultados estão salvos no formato MATLAB, conforme será visto a seguir.

```

%%%%% 2D-AREA INTEGRATION OF %%%%%
%      (Dfi_x(j)*(kyy*Dfi_x(i)-kx*Dfi_y(i)))

H_X_W_X(1,1)=1/4*(-y3+y2)*(-kyy*y3+kyy*y2-kx*x3+kx*x2)/Ae;
H_X_W_X(1,2)=-1/4*(y1-y3)*(-kyy*y3+kyy*y2-kx*x3+kx*x2)/Ae;
H_X_W_X(1,3)=1/4*(y1-y2)*(-kyy*y3+kyy*y2-kx*x3+kx*x2)/Ae;
H_X_W_X(2,1)=-1/4*(-y3+y2)*(kyy*y1-kyy*y3+kx*x1-kx*x3)/Ae;
H_X_W_X(2,2)=1/4*(y1-y3)*(kyy*y1-kyy*y3+kx*x1-kx*x3)/Ae;

```

```

H_X_W_X(2,3)=-1/4*(y1-y2)*(kyy*y1-kyy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_X_W_X(3,1)=1/4*(-y3+y2)*(kyy*y1-kyy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;
H_X_W_X(3,2)=-1/4*(y1-y3)*(kyy*y1-kyy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;
H_X_W_X(3,3)=1/4*(y1-y2)*(kyy*y1-kyy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;

%%%% 2D-AREA INTEGRATION OF %%%%
% (Dfi_x(j)*(-kxy*Dfi_x(i)+kxx*Dfi_y(i)))

H_X_W_Y(1,1)=-1/4*(-y3+y2)*(-kxy*y3+kxy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_X_W_Y(1,2)=1/4*(y1-y3)*(-kxy*y3+kxy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_X_W_Y(1,3)=-1/4*(y1-y2)*(-kxy*y3+kxy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_X_W_Y(2,1)=1/4*(-y3+y2)*(kxy*y1-kxy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_X_W_Y(2,2)=-1/4*(y1-y3)*(kxy*y1-kxy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_X_W_Y(2,3)=1/4*(y1-y2)*(kxy*y1-kxy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_X_W_Y(3,1)=-1/4*(-y3+y2)*(kxy*y1-kxy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;
H_X_W_Y(3,2)=1/4*(y1-y3)*(kxy*y1-kxy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;
H_X_W_Y(3,3)=-1/4*(y1-y2)*(kxy*y1-kxy*y2+kxx*x1-kxx*x2)/Ae;

%%%% 2D-AREA INTEGRATION OF %%%%
% (Dfi_y(j)*(kyy*Dfi_x(i)-kxx*Dfi_y(i)))

H_Y_W_X(1,1)=-1/4*(-x3+x2)*(-kyy*y3+kyy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_X(1,2)=1/4*(x1-x3)*(-kyy*y3+kyy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_X(1,3)=-1/4*(x1-x2)*(-kyy*y3+kyy*y2-kxx*x3+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_X(2,1)=1/4*(-x3+x2)*(kyy*y1-kyy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_X(2,2)=-1/4*(x1-x3)*(kyy*y1-kyy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_X(2,3)=1/4*(x1-x2)*(kyy*y1-kyy*y3+kxx*x1-kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_X(3,1)=1/4*(-x3+x2)*(-kyy*y1+kyy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_X(3,2)=-1/4*(x1-x3)*(-kyy*y1+kyy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_X(3,3)=1/4*(x1-x2)*(-kyy*y1+kyy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;

%%%% 2D-AREA INTEGRATION OF %%%%
% (Dfi_y(j)*(-kxy*Dfi_x(i)+kxx*Dfi_y(i)))

H_Y_W_Y(1,1)=-1/4*(-x3+x2)*(kxy*y3-kxy*y2+kxx*x3-kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_Y(1,2)=1/4*(x1-x3)*(kxy*y3-kxy*y2+kxx*x3-kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_Y(1,3)=-1/4*(x1-x2)*(kxy*y3-kxy*y2+kxx*x3-kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_Y(2,1)=1/4*(-x3+x2)*(-kxy*y1+kxy*y3-kxx*x1+kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_Y(2,2)=-1/4*(x1-x3)*(-kxy*y1+kxy*y3-kxx*x1+kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_Y(2,3)=1/4*(x1-x2)*(-kxy*y1+kxy*y3-kxx*x1+kxx*x3)/Ae;
H_Y_W_Y(3,1)=-1/4*(-x3+x2)*(-kxy*y1+kxy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_Y(3,2)=1/4*(x1-x3)*(-kxy*y1+kxy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;
H_Y_W_Y(3,3)=-1/4*(x1-x2)*(-kxy*y1+kxy*y2-kxx*x1+kxx*x2)/Ae;

```

Listagem 3.10. Cálculo das MEs usando MNT23D para a Listagem 3.9.

Do exemplo acima, observa-se que estas já são as expressões finais para um programa em elementos finitos, onde aí já estão incluídas as características do material, e suas respectivas alocações.

3.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os programas, feitos em MATLAB, para o cálculo analítico de matrizes elementares em elementos finitos e sua manipulação vetorial. Todos eles apresentam uma amigável interface gráfica, que facilita, incentiva e populariza seus usos.

Em princípio, o NODAL23D possui a característica de montar matrizes elementares para domínios 2D ou 3D usando elementos triangulares ou tetraédricos, respectivamente. Para o domínio 2D, é possível calcular integrais de fluxo (linha) ou de superfície, enquanto que, para o caso 3D, ele calcula integrais de fluxo (superfície) ou de volume. Também destaca-se a possibilidade de exportar as matrizes em formatos compatíveis com MATLAB, FORTRAN, ou C. O usuário também pode escolher entre aproximações quadráticas ou lineares, para as funções de base, possibilitando maior precisão dos resultados. Finalmente, a interface *point and click* do programa torna possível uma fácil entrada e saída de dados, não requerendo nenhum conhecimento especializado para traduzir seus resultados, aliado, também, a uma grande velocidade de cálculo.

O segundo programa, EDGE2D, possui uma interface e funcionalidade semelhantes ao anterior, todavia com a característica de gerar matrizes elementares para a formulação com elementos de aresta, num domínio 2D. Por tratar-se de uma ferramenta análoga ao NODAL23D, além da própria aparência, o EDGE2D mantém também os mesmos critérios e procedimento de manuseio, bem como a emissão de mensagens de erro.

Por fim, foi também mostrado o MNT23D, uma ferramenta desenvolvida para a manipulação vetorial, presente no Método dos Elementos Finitos, enfatizando como ela pode ser bastante útil àqueles que desejam manipular e/ou desenvolver expressões no método. Além disso, também pode-se citar sua utilidade no cálculo das MEs mais complexas, a partir de uma interface deste programa com o NODAL23D.

Entre as características gerais e comuns a todos eles, pode-se enumerar, também, grande velocidade, estabilidade, simples interface de utilização para com o usuário e a agilidade em mostrar seus resultados de maneira analítica e exata.

-
-
-

Capítulo 4 – Propagadores 1D e 2D não-lineares **com passo adaptativo**

Nos três capítulos anteriores, foi estudado o Método dos Elementos Finitos e foi mostrado aos leitores três ferramentas auxiliares na concepção geral de um programa seguindo tal método.

Agora, neste capítulo, serão comentados algoritmos de passo adaptativo para propagadores onde os meios são não-lineares, onde a malha pode ser tanto unidimensional como bidimensional, bem como a utilização de um novo tipo de PML, para meios não-lineares.

Em princípio, este capítulo dividir-se-á em duas seções principais, que exploram as não-linearidades, ressaltando alguns pontos peculiares e importantes para a concepção de programas não-lineares; uma outra que coloca os propagadores onde as malhas são unidimensional e bidimensional, respectivamente, e, por último, a extensão de PML ao caso não-linear.

4.1. Não-linearidade e suas implicações práticas na simulação

Nas simulações com métodos numéricos rigorosos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Diferenças Finitas (DF), em óptica integrada não-linear, as primeiras entidades físicas que vêm à mente são: potência, densidade de potência, e coeficiente não-linear. Com efeito, pode-se afirmar que estes são parâmetros básicos a se conhecer para conseguir realizar as simulações. Deve-se salientar a afirmação “óptica integrada”, pois, em outras linhas da própria óptica não-linear, esses parâmetros podem apresentar-se normalizados, de tal maneira que não se necessite ao menos

conhecer o valor exato de um índice de refração, ou mesmo um coeficiente não-linear, para conseguir obter resultados. Como assim?

A resposta à essa pergunta traz à tona uma outra discussão interessante sobre diversos níveis, abordagens e até vantagens que se tem ao estudar óptica não-linear. Ou seja, essa discussão aparece como uma boa oportunidade para, também, comentar um pouco mais sobre os métodos numéricos e suas limitações.

Em princípio, é de conhecimento notório que a Óptica abrange uma vasta gama de conhecimentos, metodologias e enfoques, que vão desde a óptica difrativa até os próprios sistemas de comunicações ópticas. Esta observação, na opinião do autor deste trabalho, é algo que deve sempre ser lembrado, pois pode até justificar o uso da palavra “método numérico” em certas situações, colocando limitações e peculiaridades, bem como esclarecer alguns equívocos cometidos.

Para entender melhor toda essa situação, considerar-se-á um exemplo simples, mas que certamente auxilia na questão. Estudando-se o conhecido livro de Agrawal [73], de Óptica não-linear, o autor comenta, no fim do Capítulo 2, os possíveis “métodos numéricos” para resolver equações não-lineares de propagação de pulsos ópticos, ou até mesmo dispositivos, também não-lineares, como acopladores, grades de Bragg, moduladores, etc. De fato, naquele livro é notório o uso do bem popular Método de Fourier (MF) com passo dividido, que mostra ser simples e eficiente para retratar bem as simulações computacionais de fenômenos ou dispositivos não-lineares em sistemas de comunicações ópticas, além de poder ser facilmente implementado em Fortran, C ou, mesmo, Matlab.

Além disso, pode-se ainda citar duas colocações importantes. Em primeiro lugar, tem-se o fato de que as distâncias envolvidas atingem facilmente dezenas de quilômetros, e, ainda assim, consegue-se simular dispositivos sem se conhecer os índices de refração. Isto não é possível com a utilização do MEF ou DF. Um segundo ponto é que, naquelas situações, é normal trabalhar com unidades normalizadas, onde vários parâmetros físicos ficam ocultos, e parecem ser secundários.

Aqueles que não estão acostumados com ferramentas numéricas, como o MEF ou DF, e não tem muita noção das penalidades que se paga com os comentários no parágrafo anterior, tendem a achar bastante limitados tais métodos.

Basicamente, pode-se afirmar que a principal diferença entre a abordagem de Agrawal [73] e a de outros livros que discutem um pouco de óptica não-linear ou dispositivos, Syms [17] ou Koshiba [16], é o simples fato de serem incompatíveis entre si, não sendo possível compará-las. Eles tratam de óptica não-linear e dispositivos, mas não se encaixam na mesma abordagem.

A abordagem de Agrawal é mais sistêmica, de comunicações ópticas, onde as distâncias envolvidas são grandes (se comparadas às distâncias centimétricas abordadas em [16]-[17]), e está-se preocupado com os perfis temporais dinâmicos de pulsos ópticos, parâmetros sistêmicos (ruído, interferência, efeitos dispersivos, diversos efeitos não-lineares, etc.). Nesse tipo de abordagem é comum trabalhar com unidades normalizadas em relação a parâmetros fundamentais, como índices de refração efetivos dos modos do guia de onda, áreas efetivas, coeficientes não-lineares, constantes de acoplamento, etc, mesmo quando simulam-se dispositivos como acopladores ou filtros ópticos não-lineares. Deve-se deixar claro que este tipo de método e linha de trabalho seguida pelo autor, descreve tanto quantitativamente como qualitativamente os resultados experimentais, merecendo todo o mérito daqueles que trabalham com isso.

Por outro lado, dentro da linha de trabalho citada anteriormente, não é necessário conhecer métodos numéricos como o MEF, por exemplo, pois, se estes representassem ferramentas viáveis para determinados problemas, poderiam ser tão poderosos que muito do que o método disponibilizasse não teria interesse em tal contexto, penalizando bastante uma possível relação entre custo e benefício. Esse comentário explica porque não faz muito sentido usar MEF no contexto de Agrawal, uma vez que lá as prioridades são outras.

Em outras ocasiões, já foi mostrada a potencialidade do MEF ou DF em situações onde o rigor eletromagnético faz-se importante, gerando situações que não seriam facilmente resolvidas, e com resultados confiáveis, se fossem utilizados métodos espectrais, como o Método de Fourier, por exemplo. Normalmente, pode-se afirmar que muitos casos de estudo na óptica integrada, seja linear ou não-linear, são assim. Na linha dos livros [16] e [17], modela-se verdadeiramente a física em seu estado mais profundo. Deve-se observar o rigor de dimensões, materiais, valores de constantes, até porque, nesses métodos, as técnicas de truncamento das janelas computacionais são

diferentes daquelas do Método de Fourier, por exemplo. Em outras palavras, usando MF pode-se usar técnicas eficientes para acabar com as reflexões numéricas em problemas com o tipo de abordagem dada por Agrawal; todavia, no caso de Koshiba, Jim[15], ou Syms, as mais eficientes e utilizadas técnicas para garantir resultados corretos, devido a este truncamento computacional, são intrinsicamente baseadas num rigor eletromagnético, como as ABCs [27] e PMLs [44]-[46].

Em suma, nesse segundo tipo de abordagem faz-se muito mais necessário um profundo conhecimento e rigor eletromagnético do problema estudado, do que uma simples manipulação ou normalização matemática para as equações que regem o sistema, que normalmente distancia um pouco da física básica do dispositivo.

Por fim, estas colocações ajudam a afirmar o que foi dito no início da seção a respeito da potência, densidade de potência, e coeficiente não-linear, e suas importâncias em simulações de óptica integrada não-linear, com métodos como o MEF ou DF. Desta forma, nas subseções seguintes fez-se questão de detalhar e deixar claro, para futuros leitores e o enriquecimento deste trabalho, muito daquilo que julga-se necessário antes de simular dispositivos ópticos não-lineares, onde os rigores físicos são importantes.

Para isso, fez-se uma análise ressaltando os seguintes aspectos: potência, densidade de potência, coeficientes não-lineares, condições de contorno, camadas absorventes e considerações gerais computacionais.

4.1.1. Potência e densidade de potência

Infelizmente, o grau de complexidade em obter soluções analíticas, quando possíveis, leva a retratar apenas o caso mais simples, 1D, embora o procedimento seja aplicável também quando consideram-se duas dimensões. Sendo assim, partir-se-á da análise mais natural possível, um guia planar linear com geometria similar à mostrada na Fig. 4.1*.

* Na notação 1+1D, a partir daqui utilizada, o primeiro índice denota apenas uma dimensão transversal, ao passo que o segundo índice a direção longitudinal.

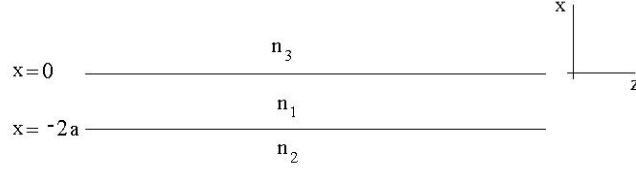


Fig. 4.1. Esquemático de um guia de onda 1+1D.

Por conveniência, mostrar-se-á todos os detalhes e passagens importantes, com o objetivo principal de não deixar de lado, nem obscuro, passos fundamentais para a generalização de outras topologias que serão discutidas mais adiante, neste e no próximo capítulo.

Para encontrar os modos guiados no guia retangular acima, parte-se da equação de onda, uma vez que sua demonstração a partir das Equações de Maxwell é trivial e pode ser encontrada em muitos livros [36]. Deve-se lembrar que os efeitos de perda serão aqui desconsiderados e a permeabilidade magnética relativa é unitária, $\mu_r = 1$.

Desta forma, escrevendo-se o campo elétrico numa notação mais familiar, assumindo o fator $\exp(-i\omega t)$:

$$\nabla^2 E + k^2 n_j^2 E = 0, \quad (4.1)$$

$k^2 = \omega^2 / c^2$, $\beta = n_e k$ (constante de propagação), n_e o índice de refração efetivo do guia. Equação (4.1) é a forma familiar da equação de onda para um dielétrico uniforme com índice de refração linear n_j . Nota-se que foi feita a consideração de que $\partial / \partial y = 0$, ou, equivalentemente, expandir ao infinito, positivamente e negativamente, a direção ao longo do eixo-y, tal que a distribuição de campo é uniforme ao longo da direção y. Se agora é assumida a dependência em z do tipo $\exp(i\beta z)$, a expressão (4.1) pode ser redefinida para as 3 regiões do guia da Fig. 4.1, como:

$$\text{Região 3:} \quad \frac{d^2 E_3}{dx^2} - r^2 E_3 = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Região 1:} \quad \frac{d^2 E_1}{dx^2} + q^2 E_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Região 2:} \quad \frac{d^2 E_2}{dx^2} - p^2 E_2 = 0 \quad (4.4)$$

onde $q^2 = n_1^2 k^2 - \beta^2$, $p^2 = \beta^2 - n_2^2 k^2$, $r^2 = \beta^2 - n_3^2 k^2$ e E_i ($i=1,2,3$) é a componente ao longo da direção y presente nos 3 guias. Equações similares podem ser deduzidas para o campo H .

Da suposição $\partial/\partial y = 0$ nas equações de Maxwell, isto implica que as componentes de campo não nulas para o modo TE ($E_z=0$) são E_y , H_x e H_z , levando facilmente à:

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \quad (4.5)$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.6)$$

Para modos guiados, é requerida que a potência fique confinada ao longo da região central, ou guia 1. A forma das Equações (4.2)-(4.4) implica que a solução é oscilatória ao longo da região 1 ($q^2 \geq 0$), com evanescência nas regiões 2 e 3.

Dessas considerações prévias, pode-se escrever as soluções para E_y , omitindo $\exp(i\beta z - i\omega t)$ nas 3 regiões, como:

$$E_y = \begin{cases} A \exp(-rx) & , x \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$E_y = \begin{cases} A \cos(qx) + B \sin(qx) & , 0 \geq x \geq -2a \end{cases} \quad (4.8)$$

$$E_y = \begin{cases} [A \cos(2aq) - B \sin(2aq)] \exp[p(x+2a)] & , -2a \geq x \end{cases} \quad (4.9)$$

Das equações acima, nota-se que naturalmente existe a continuidade do campo E_y . Todavia, nada pode ser inferido dos valores de A e B . Para isto, deve-se também aplicar a condição sobre a componente tangencial do campo magnético, no caso H_z . Assim, para completar as condições deve-se substituir estes valores de E_y sobre Equação (4.6), o que leva à:

$$H_z = \frac{-i}{\omega\mu_0} \begin{cases} -rA \exp(-rx) & , x \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$H_z = \frac{-i}{\omega\mu_0} \begin{cases} q[-A \sin(qx) + B \cos(qx)] & , 0 \geq x \geq -2a \end{cases} \quad (4.11)$$

$$H_z = \frac{-i}{\omega\mu_0} \begin{cases} p[A \cos(2aq) - B \sin(2aq)] \exp[p(x+2a)] & , -2a \geq x \end{cases} \quad (4.12)$$

Aplicando as condições de continuidade do campo H_z em (4.10)-(4.12), chega-se às seguintes condições para os modos TE:

$$\text{Em } x=0 \quad -rA = qB . \quad (4.13)$$

$$\text{Em } x=-2a \quad q[B \cos(2aq) + A \sin(2aq)] = p[A \cos(2aq) - B \sin(2aq)] . \quad (4.14)$$

A resolução acima, das equações acopladas, é um problema de autovalor e autovetor que retorna a constante de propagação, β , e o modo do guia, sendo a geometria e o meio material conhecidos a priori.

Para o modo TM ($H_z=0$) o procedimento é semelhante, sendo a Equação (4.1) escrita para o campo H , e as componentes de campo existentes seriam H_y , E_x e E_z , relacionadas da seguinte forma:

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 n_j^2} H_y \quad (4.15)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0 n_j^2} \frac{\partial H_y}{\partial x} . \quad (4.16)$$

Tais equações podem ser obtidas diretamente do Teorema da Dualidade do eletromagnetismo [15]. Lembrando que, neste caso, $\mu_r=1$. De maneira semelhante, também encontra-se que:

$$H_y = \begin{cases} C \exp(-rx) & , x \geq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$H_y = \begin{cases} C \cos(qx) + D \sin(qx) & , 0 \geq x \geq -2a \end{cases} \quad (4.18)$$

$$H_y = \begin{cases} [C \cos(2aq) - D \sin(2aq)] \exp[p(x+2a)] & , -2a \geq x . \end{cases} \quad (4.19)$$

Da mesma maneira que em (4.10)-(4.12), deve-se também garantir a continuidade do campo E_z , de tal modo que pode-se facilmente encontrar:

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} \frac{-rC}{n_3^2} \exp(-rx) & , x \geq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} \frac{q}{n_1^2} [-C \sin(qx) + D \cos(qx)] & , 0 \geq x \geq -2a \end{cases} \quad (4.21)$$

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} \frac{p}{n_2^2} [C \cos(2aq) - D \sin(2aq)] \exp[p(x+2a)] & , -2a \geq x . \end{cases} \quad (4.22)$$

Aplicando as condições de continuidade do campo E_z em (4.20)-(4.22) chega-se às condições relevantes para os modos TM:

$$\text{Em } x=0 \quad \frac{-rC}{n_3^2} = \frac{qD}{n_1^2} \quad (4.23)$$

$$\text{Em } x=-2a \quad \frac{q}{n_1^2} [C \sin(2aq) + D \cos(2aq)] = \frac{p}{n_2^2} [C \cos(2aq) - D \sin(2aq)]. \quad (4.24)$$

A demonstração dos campos e suas condições, dados por (4.7)-(4.14) e (4.17)-(4.24), é razoavelmente encontrada em livros na forma colocada acima. Normalmente, somente (4.7)-(4.9) e (4.17)-(4.19) são colocadas ficando a cargo do leitor deduzir (4.10)-(4.12) e (4.20)-(4.22), o que não é complicado. Todavia, dar continuidade nos cálculos para encontrarmos analiticamente a potência já é mais raro.

Desta forma, dando continuidade ao raciocínio começado anteriormente, para modos TE e TM, respectivamente, o próximo passo é encontrar o fluxo médio de potência, P , em um guia de onda, dado pela integral ao longo da seção transversal da componente z do vetor de Poynting (S_z , densidade de potência):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}(E \times H^*)_z dx \quad (4.25)$$

Para os modos TE, S_z é, então, dado por:

$$S_z = -\frac{1}{2} E_y H_x^* = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} |E_y|^2 \quad (4.26)$$

Aplicando a definição da densidade de potência, (4.26), em (4.25), e utilizando as definições de campo, expressas por (4.7)-(4.9), em todas as 3 regiões encontra-se:

$$P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2r} \quad (4.27)$$

$$P_1 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2} \left(\frac{q^2 + r^2}{q^2} \right) \left[2a + \frac{p}{q^2 + p^2} + \frac{r}{q^2 + r^2} \right] \quad (4.28)$$

$$P_2 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2p} \left(\frac{q^2 + r^2}{p^2 + q^2} \right) \quad (4.29)$$

A potência total, que é dada pela soma de P_1 , P_2 e P_3 , é então escrita como:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \right) \frac{A^2}{2} \left(\frac{q^2 + r^2}{q^2} \right) \left[2a + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right] \quad (4.30)$$

Embora a Equação (4.30) possua uma forma mais elegante e apelativa em termos de entidades físicas, esta ainda não é a mais usada pelos engenheiros, ou em resultados de carácter experimental. Utilizando as expressões (4.7)-(4.9) e a relação (4.13), pode-se facilmente concluir que a coordenada x , onde o campo E_y atinge seu máximo, bem como este valor máximo de campo (E_y^{\max}), são dados por:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{q} \tan^{-1}\left(\frac{-r}{q}\right) \\ E_y^{\max} = A \frac{(q^2 + r^2)^{1/2}}{q} \end{cases} \quad (4.31)$$

Desta maneira, pode-se reescrever (4.30) da seguinte forma:

$$P = \frac{\beta}{2\mu_0\omega} \left(\frac{w_{\perp}}{2} \right) (E_y^{\max})^2 \equiv \frac{E_y^{\max} H_x^{\max}}{4} w_{\perp} \quad , \quad (4.32)$$

onde o símbolo H_x^{\max} indica o valor máximo do campo H_x , e w_{\perp} a chamada largura efetiva, definida como $w_{\perp} = 2a + \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ [62]. Por fim, a fórmula (4.32) é a expressão final e mais natural de lidar com a potência, e sua importância ficará clara mais adiante.

De maneira análoga, para o caso TM o procedimento é semelhante. De início, o vetor de Poynting, S_z , é dado por

$$S_z = \frac{1}{2} H_y^* E_x = \frac{\beta}{2\omega n_j^2 \epsilon_0} |H_y|^2 \quad , \quad (4.33)$$

com as seguintes distribuições de potência nas 3 regiões

$$P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_3^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2r} \quad (4.34)$$

$$P_1 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_1^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2} \left(\frac{q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4}{q^2 n_3^4} \right) \left[2a + \frac{pn_1^2 n_2^2}{q^2 n_2^4 + p^2 n_1^4} + \frac{rn_1^2 n_3^2}{q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4} \right] \quad (4.35)$$

$$P_2 = \left(\frac{\beta}{2\omega n_2^2 \epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2p} \left(\frac{n_2^4}{n_3^4} \right) \left(\frac{q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4}{p^2 n_2^4 + q^2 n_1^4} \right) \quad . \quad (4.36)$$

A potência total, dada pela soma total de P_1 , P_2 e P_3 , é, assim, dada por:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \left(\frac{\beta}{2\omega\epsilon_0} \right) \frac{C^2}{2} \left(\frac{q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4}{q^2 n_1^2 n_3^2} \right) \left[2a + \frac{n_1^2 n_2^2 (p^2 + q^2)}{p(q^2 n_2^4 + p^2 n_1^4)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (q^2 + r^2)}{r(q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4)} \right]. \quad (4.37)$$

Assim como em (4.30), pode-se rearranjar (4.37) e escrevê-la simplesmente como

$$P = \frac{\beta}{2\epsilon_0 n_1^2 \omega} \left(\frac{w_{\square}}{2} \right) (H_y^{\max})^2 \equiv \frac{E_x^{\max} H_y^{\max}}{4} w_{\square}, \quad (4.38)$$

sendo $w_{\square} = 2a + \frac{n_1^2 n_2^2 (p^2 + q^2)}{p(q^2 n_2^4 + p^2 n_1^4)} + \frac{n_1^2 n_3^2 (q^2 + r^2)}{r(q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4)}$ e $H_y^{\max} = C \frac{(q^2 n_3^4 + r^2 n_1^4)^{1/2}}{qn_3^2}$ [62].

Ao contrário do que acontece na análise de guias lineares, as relações (4.32) e (4.38) são as mais importantes para qualquer trabalho com meios não-lineares, uma vez que determinam diretamente as relações entre potência (P), densidade de potência (S_z) e os valores máximos de campo. A relativa simplicidade dessas expressões para o fluxo de potência e sua interpretação física é uma elegante demonstração do valor de potência e do conceito de largura efetiva, no caso 1D. A idéia principal das expressões (4.32) e (4.38) será abordada na próxima seção e capítulo.

4.1.2. Coeficiente não-linear e tipos usuais de não-linearidades

Uma gama de efeitos não-lineares em guias ópticos é governada pelo bem conhecido Efeito Kerr, e suas implicações em dispositivos gerais, como acopladores, filtros, roteadores, etc. Nestes casos, o que existe é uma variação do índice de refração com o quadrado do campo elétrico, em outras palavras: $n = n_l + n_2 |E|^2$, sendo n_l o índice de refração linear, e n_2 o coeficiente de índice não-linear. Desta equação, nota-se que a unidade de n_2 é m^2/V^2 ($[n_2] = \text{m}^2/\text{V}^2$) no sistema internacional de unidades, uma vez que a variação do índice (δn) é adimensional.

Todavia, esta não é a maneira mais usual de lidar com o coeficiente de não-linearidade, uma vez que $[n_2] = \text{m}^2/\text{W}$ é a mais usual. É comum tratar a variação não-linear do índice de refração como $\delta n_l = n_2^I I$, onde I é a intensidade do campo óptico

descrito por $I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_l |E|^2$, estando as entidades ε_0 , c e E no sistema internacional de unidades e $[I] = \text{W/m}^2$. Por outro lado, $n_2^l = \frac{2n_2}{\varepsilon_0 c n_l}$, com $[n_2^l] = \text{m}^2/\text{W}$.

É bem conhecido que, se o meio possui uma não-linearidade tipo Kerr, os sólitons espaciais não são estáveis em guias com duas dimensões na seção transversal, ou seja, os casos 2+1D [37]-[43]. Nessas situações, mostrou-se que uma forma de estabilizar sua propagação é considerar uma não-linearidade saturável, altamente estudada nestas situações, que, além disso, também é usada para modelos em líquidos [37] e cristais [38].

De fato, existem dois modelos principais de saturação de não-linearidade que aparecem na literatura [39]-[43]. Estes modelos, assim como o da não-linearidade Kerr, estão resumidos na Tabela 4.1:

Tipo de Não-linearidade	Permissividade, ε
Kerr	$\varepsilon_r = \varepsilon_r^l + a E ^2$
Saturável	$\varepsilon_r = \varepsilon_r^l + \frac{a E ^2}{1 + \alpha a E ^2}$ $\varepsilon_r = \varepsilon_r^l + \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha a E ^2)]$

Tabela 4.1. Resumo dos mais utilizados tipos de não-linearidade em óptica integrada.

Na Tabela 4.1, os coeficientes a e α são dados por $a = n_l^2 n_2^l c \varepsilon_0$ e $\alpha = 2n_l \Delta n_{sat}$. De fato, estes são os prováveis casos de estudo utilizados nos programas de análise modal (Seção 5.1.) e nos propagadores não-lineares (Seções 4.2 e 4.3).

4.1.3. Condições de contorno e camadas absorventes

Do ponto de vista computacional, o campo elétrico nos extremos computacionais, onde deseja-se simular um dispositivo qualquer, é assumido ser nulo, devido à condição assintótica $\partial E / \partial r = 0$ (quando $r \rightarrow \infty$, sendo r as coordenadas espaciais genéricas). Em geral, na óptica, uma das condições de contorno amplamente utilizada é a PML (*Perfectly Matched Layer*), como camadas absorventes para o domínio

computacional que foi truncado. O objetivo das PMLs é simular o truncamento de uma região que, supostamente, deveria ser infinita, mas que computacionalmente é impossível de se obter; sendo assim, introduz-se as PMLs para que a região de discretização seja menor, mas que este fato não introduza erros no cálculo dos campos. Para uma excelente e clara abordagem desta técnica, aconselha-se a leitura de [27].

A utilização de camadas perfeitamente casadas (PML, *Perfectly Matched Layer*) foi pioneiramente introduzida em [44]. A PML pode ser ajustada de forma a ser perfeitamente casada com um meio contíguo de características (ϵ, μ) , de forma que ondas incidentes sobre as mesmas não sofram reflexão na interface, e ao mesmo tempo, devido à sua condutividade finita, a PML atenua a onda propagante em seu interior.

A PML tem como função principal simular um espaço aberto evitando as reflexões produzidas pelo truncamento do domínio computacional. Hoje em dia, as PMLs são bastante utilizadas nos mais diferentes campos, como microondas [45], óptica [49], acústica [46], etc. Ver Fig. 4.2.

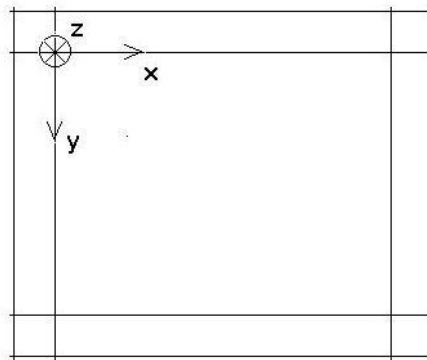


Fig. 4.2. Esquema de localização das PMLs 2D.

Neste trabalho de propagação escalar, utilizam-se as PMLs com o operador Nabla modificado $\vec{\nabla}' = s_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + s \frac{\partial}{\partial z} \vec{z}$ [63]. A disposição e implementação desses operadores podem ser resumidas de acordo com a Fig. 4.2. Os parâmetros s , s_x e s_y são calculados por:

$$s = \begin{cases} 1 - j \frac{3c}{2\omega_0 n d} \left(\frac{\rho}{d} \right)^2 \ln \frac{1}{R} & \text{nas regiões com PML} \\ 1 & \text{em outras regiões} \end{cases}, \quad (4.39)$$

onde ω_0 é a frequência angular, d a largura da camada PML, n o índice de refração da região à qual a PML faz fronteira, ρ a distância em que se encontra um ponto dentro da região de PML medida desde a borda interna desta, e R é o fator de reflexão. Os outros dois parâmetros, s_x e s_y , tomam os seguintes valores dependendo da sua localização:

$$\begin{aligned} s_y = s \quad \text{e} \quad s_x = 1, & \text{ nas PMLs perpendiculares ao eixo } x \\ s_x = s \quad \text{e} \quad s_y = 1, & \text{ nas PMLs perpendiculares ao eixo } y \\ s_y = s_x = 1, & \text{ nas PMLs situadas nas quinas.} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esse é o esquema geral para o caso de utilização de PMLs no caso 2+1D, mas a sua redução para o caso 1+1D é simplesmente uma redução do operador

$$\nabla' = s_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{x} + s \frac{\partial}{\partial z} \vec{z} \quad \text{e sua combinação com a Equação (4.39).}$$

4.1.4. Aspectos computacionais

Do ponto de vista computacional, todas as subseções anteriores possuem implicações importantes. Ao contrário do que acontece em meios e guias lineares, já foi comentado que todas as unidades devem ser cuidadosamente intercaladas para não haver incompatibilidade numérica. Em outras palavras, no caso linear, parâmetros de simulação como coordenadas, comprimento de onda e passo de propagação não necessitam de um critério muito rigoroso de unidades, podendo estar normalizados entre si.

No caso linear, a potência e densidade de potência associadas com o campo não são importantes, uma vez que elas não influenciam em nenhuma constante física que altere a propagação. Por outro lado, em meios não-lineares, as próprias unidades espaciais influenciam os resultados, se não estão devidamente casadas com o resto das unidades. Conforme visto anteriormente, as coordenadas dos pontos modificam

diretamente parâmetros como a largura efetiva (1+1D) ou a área efetiva (2+1D), que, por conseguinte, alteram os valores de campo.

Uma análise cuidadosa e a compatibilidade das unidades relativas à permissividade elétrica também é um importante fator. É comum serem utilizados os coeficientes não-lineares n_2^I , ao invés do mais natural, n_2 . Para o caso de não-linearidade Kerr este detalhe não faz muita diferença; todavia, quando outros tipos de não-linearidade estão envolvidas, essa passagem não é tão natural, e, na maioria dos casos, pode gerar confusão ao tentar simular alguma situação desse tipo.

Outro fator, não menos importante, é o passo de propagação, Δz . A não-linearidade e sua capacidade de modificar o meio material, implicam no cuidado que se deve tomar com Δz . Normalmente, o caso linear produz resultados muito condizentes se utilizado um passo $\Delta z = \lambda/50$. Todavia, para um meio não-linear este mesmo passo reproduz resultados bem diferentes do caso real (isso será visto mais adiante), sendo necessário um passo $\Delta z = \lambda/5000$, ou a utilização de técnicas adaptativas.

Para um problema 1+1D usando Elementos Finitos, mesmo com passo tão pequeno, o esforço computacional não é tão grande; todavia, no caso 2+1D isso é um esforço computacional muito grande, podendo demorar dias, dependendo da distância total simulada, para o computador já citado. Nesse caso, o passo é um parâmetro que deve-se ter cuidado, para conseguir soluções convergentes.

Finalmente, deve-se atentar para as condições absorventes no truncamento computacional, neste trabalho, as PMLs. Conforme mencionado anteriormente, essas camadas absorventes, em sua concepção, funcionam como um casamento de impedância, e, no caso da óptica para um guia isotrópico, sem perdas e com $\mu_r = 1$, seria manter um mesmo índice de refração nos dois lados da interface.

Quando o meio é não-linear, todavia, sabe-se que a intensidade do campo altera o índice de refração; desta forma, faz-se necessário um método mais efetivo para se conseguir um casamento de índice de refração nas paredes de truncamento computacional. No caso 1+1D, sendo a malha uma linha, é necessário preocupar-se com dois pontos que delimitam as regiões das PMLs, e isto já foi feito com sucesso em

[50]; todavia, quando o problema é 2+1D, isto ainda não foi feito na literatura, até onde sabe-se, mas foi aqui implementado conforme visto mais adiante.

4.2. Propagadores e PMLs não-lineares

Conforme mencionado anteriormente, os propagadores não-lineares possuem algumas características peculiares, como: passo de propagação muito pequeno, uma vez que os efeitos envolvidos dependem da intensidade do campo calculado; as camadas absorventes PMLs não casar, exatamente como no caso linear, e conseqüentemente os campos poderem se refletir, se a janela computacional não for grande o suficiente (infelizmente janelas grandes aumentam o número de incógnitas para os programas) e, por último, o processo de verificar erros no programa é mais lento, uma vez que a física envolvida é mais complexa e, por conseguinte, mais susceptível a resultados incoerentes, até haver uma garantia de que estão devidamente gabaritados.

Nesta seção, os três temas serão abordados, em especial as dois primeiros, divididos em duas subseções, e, por último, uma outra subseção dedicada exclusivamente às PMLs não-lineares, para os casos 2+1D.

4.2.1. Propagador não-linear 1+1D

Neste propagador, implementou-se, com sucesso, técnicas para conseguir grandes passos de propagação (mas com esquemas adaptativos, que garantem a convergência das soluções), bem como PMLs efetivas mesmo para o caso não-linear.

Na equação que rege o sistema foi assumida uma variação $E(y, z) = \Psi(y, z) \exp(j\omega t - jkn_e z)$, resultando na seguinte expressão para um modo TE ($\partial/\partial x = 0$), com os operadores s das PMLs anteriormente mostradas na Seção 4.1.2:

$$s \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2jkn_e s \frac{\partial \Psi}{\partial z} + s_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s_y}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + sk^2 [n_l^2(x, y) + f(a|\Psi|^2) - n_e^2] \Psi = 0, \quad (4.41)$$

onde n_e é o índice de refração efetivo, k é o número de onda, n_l e $f(a/|\Psi|^2)$ são as distribuições lineares de índice de refração e a variação quadrática não-linear do índice de refração, e $a = n_l^2 n_2' c \varepsilon_0$.

Num próximo passo, aplicou-se o Método de Galerkin na formulação nodal do Método dos Elementos Finitos, seguindo o mesmo procedimento descrito no Capítulo 2. Em resumo, escreveu-se $\Psi(y, z) = \phi(z)N(y)$, sendo o Método de Galerkin aplicado à coordenada transversal, $N(y)$, enquanto que a variação do campo, ao longo da longitudinal, é mantida na equação. Desta forma, a Equação (4.41) torna-se:

$$[M] \frac{d^2 \{\phi\}}{dz^2} - 2jkn_e [M] \frac{d\{\phi\}}{dz} + ([K] - k^2 n_e^2 [P]) \{\phi\} = \{0\} \quad , \quad (4.42)$$

onde $[M]$ e $[P]$ são matrizes complexas e constantes, mas a matriz $[K]$ e o vetor das incógnitas nodais, ϕ , são funções complexas de z , sendo dadas por:

$$\begin{cases} M = \sum_e \int_e s \{N\} \{N\}^T dy \\ P = \sum_e \int_e -\frac{s_y^2}{s} \frac{d\{N\}}{dy} \frac{d\{N\}^T}{dy} dy \\ K = \sum_e \int_e sk^2 [n_l^2(y) + f(a|\Psi|^2)] \{N\} \{N\}^T dy \end{cases} \quad (4.43)$$

Em seguida, utilizou-se dois esquemas bem conhecidos de propagação, um considerando aproximação paraxial (através da recorrência de Padé) e, o outro, não-paraxial [48] :

$$-2jkn_e [\tilde{M}(\phi)] \frac{d\{\phi\}}{dz} + ([K] - k^2 n_e^2 [P]) \{\phi\} = \{0\} \quad , \quad (4.44)$$

com

$$[\tilde{M}(\phi)] = [M] + \frac{1}{4k^2 n_e^2} ([K] - k^2 n_e^2 [P]) \quad . \quad (4.45)$$

No caso da aproximação paraxial, $\tilde{M}(\phi) = M(\phi)$.

Para a propagação, aplicou-se o algoritmo de Cranck-Nicholson na direção z , resultando em:

$$[A(\phi)]_i \{\phi\}_{i+1} = [B(\phi)]_i \{\phi\}_i \quad , \quad (4.46)$$

com

$$\begin{cases} [A(\phi)]_i = -2 j k n_e [\tilde{M}(\phi)]_i + 0,5 \Delta z ([K(\phi)]_i - k^2 n_e^2 [M(\phi)]_i) \\ [B(\phi)]_i = -2 j k n_e [\tilde{M}(\phi)]_i - 0,5 \Delta z ([K(\phi)]_i - k^2 n_e^2 [M(\phi)]_i) \end{cases}, \quad (4.47)$$

onde os índices i e $i+1$ denotam as sucessões relativas aos passos de propagação.

Para efeito de comparação, simulou-se, com o propagador, uma geometria semelhante à ilustrada na Fig. 4.3, com um núcleo linear, uma casca também linear e uma outra casca não-linear. De início, considerou-se o passo fixo em $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$.

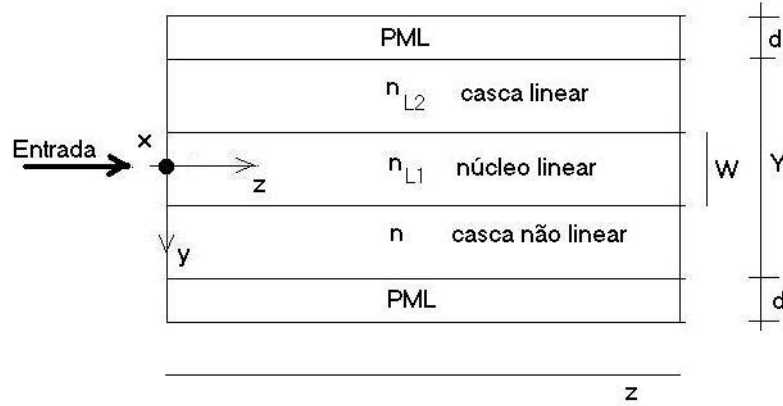


Fig. 4.3. Guia de onda utilizado para simulação 1+1D.

Na simulação, colocou-se um feixe de entrada (modo TE) que era o modo do guia no regime linear (ver Seção 4.1). Todavia, foi aplicada uma grande densidade de potência, que era suficiente para excitar a não-linearidade da casca. Os parâmetros utilizados foram uma potência 300 W/m , $n_{L1} = 1,57$, $n_{L2} = 1,55$, $n_2^I = 10^{-9}$ (não-linearidade Kerr), $W = 5 \mu\text{m}$, $Y = 50 \mu\text{m}$, $Z = 300 \mu\text{m}$, $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ e passo de propagação $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$. Os parâmetros das PMLs foram $d = 1 \mu\text{m}$ e $R = 10^{-5}$ (refletividade). Na casca não-linear, a variação do índice de refração foi descrita como $n = n_{L2} + \frac{1}{2} c \epsilon_0 n_{L2} n_2^I |E|^2$.

Da Fig. 4.4, observa-se que, ao longo da propagação, o feixe começa a se distanciar de sua localização inicial, e, a partir de uma certa distância, parece se estabilizar. Em princípio, este resultado é compreensível, pois a grande densidade de potência começa a modificar o índice de refração da casca, de maneira que este tende sempre a aumentar, devido às bordas evanescentes que modificam o índice, e tendem a confinar o campo. Por outro lado, chegaria uma distância onde o nível de potência do

feixe lateral não seria mais suficiente para variar bastante o índice de refração não-linear, causando, assim, uma estabilização do pulso. A distância total de propagação foi de 300 μm .

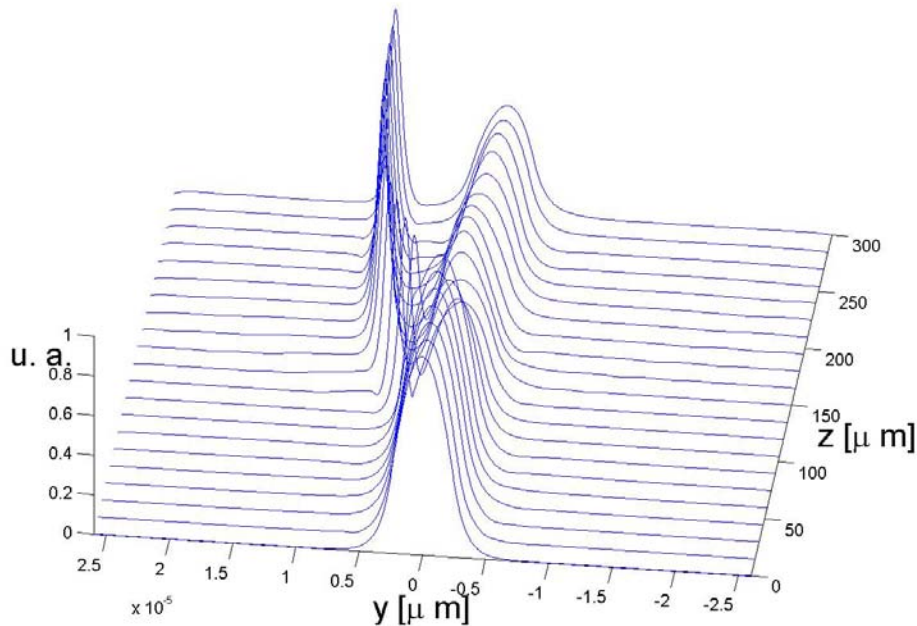


Fig. 4.4. Propagação de um feixe num guia de geometria semelhante à Fig. 4.3. $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$.

Conforme mencionado anteriormente, o passo de propagação possui uma importância fundamental em situações não-lineares. Mesmo para o caso linear, o passo utilizado anteriormente era próximo de $\lambda/10$. Sendo assim, rodou-se novamente o programa, mas considerando outros dois passos, $\Delta z = 0,01 \mu\text{m}$ e $0,001 \mu\text{m}$. Os resultados estão ilustrados nas figuras a seguir.

Nas Figs. 4.5 e 4.6, é possível notar a diferença com a Fig. 4.4. Comparando as duas figuras acima, nota-se a taxa de distanciamento no último traço mostrado em $z = 300\mu\text{m}$. A figura com passo menor apresenta-se mais próxima à PML. De fato, elas estão coerentes mas, quantitativamente, ainda apresentam algumas discrepâncias, de acordo com [50].

Em termos de tempo de simulação, é relevante o comentário do tempo gasto nas três situações, resumidos na Tabela 4.2 seguinte. Os dados contidos na mesma foram

obtidos num computador Xeon, com dois processadores de 2 GHz e 1 GB de memória RAM, e 10.153 pontos na discretização do eixo-y.

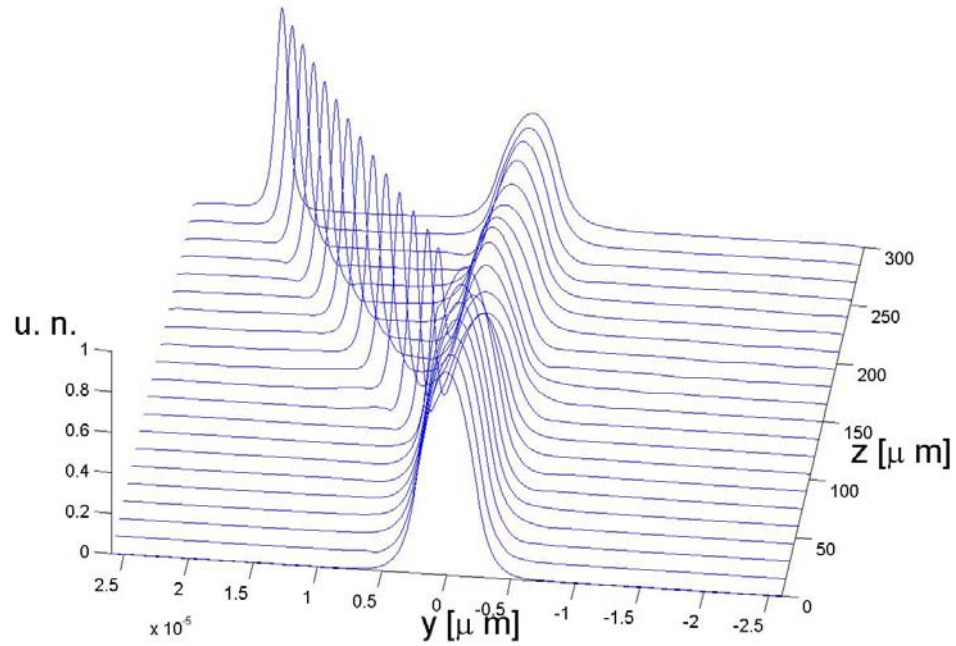


Fig. 4.5. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z = 0,01 \mu\text{m}$.

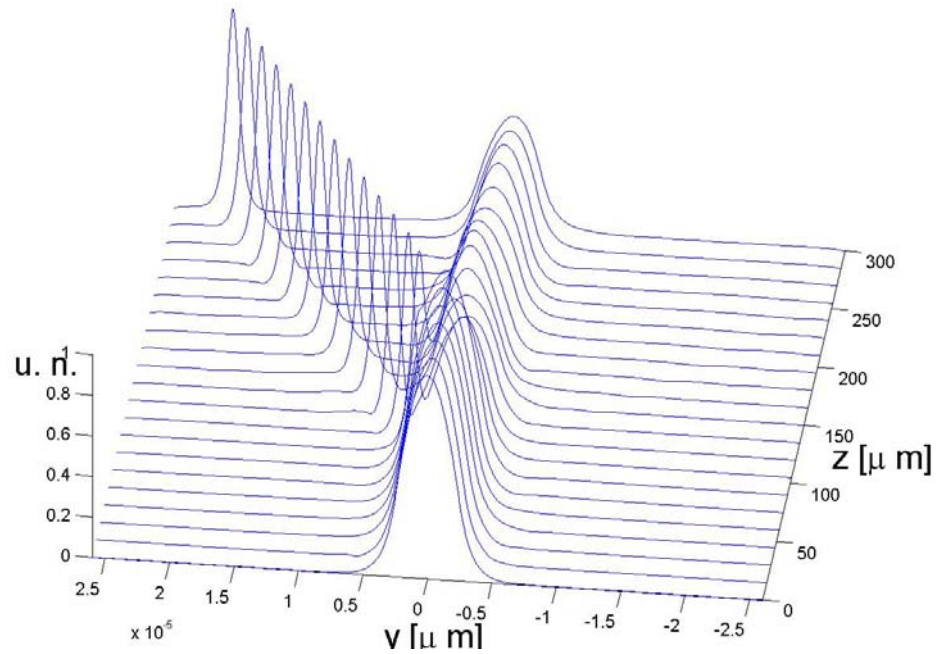


Fig. 4.6. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z = 0,001 \mu\text{m}$.

Passo de propagação (μm)	Tempo de simulação (s)
0,1	33
0,01	420
0,001	5126

Tabela 4.2. Tempos de simulação da estrutura da Fig. 4.3 para diferentes passos de propagação.

Conforme visto da Tabela 4.2, o tempo de simulação não é perfeitamente linear, e, para uma distância propagada ainda pequena, os tempos começam a tornar-se elevados. Tendo em vista esse esforço computacional, o que fez-se foi implementar um algoritmo iterativo, esquematizado na Fig. 4.7.

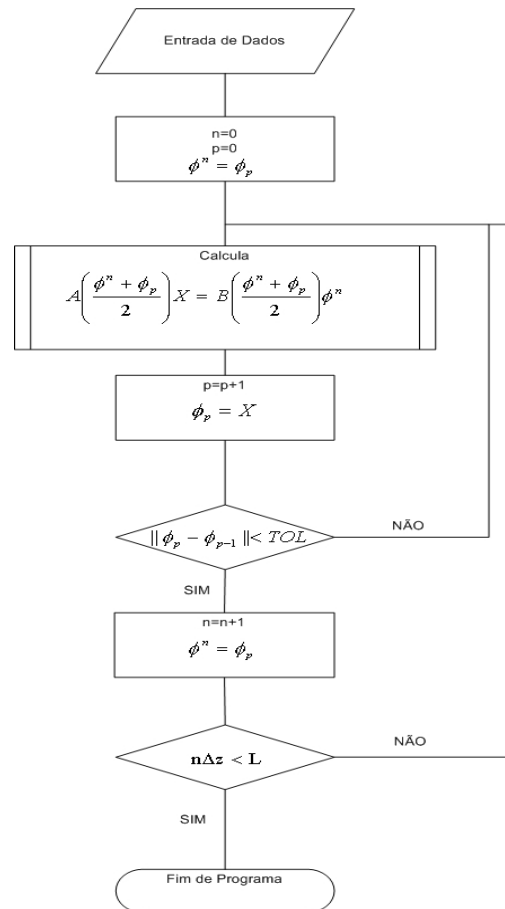


Fig. 4.7. Fluxograma do algoritmo iterativo.

Neste esquema existem dois laços. O laço mais externo é responsável pela propagação, e, o mais interno, pelo teste de convergência. Na lógica iterativa, o programa busca por uma solução convergente baseada numa média do campo exato, encontrado no passo anterior, e o campo intermediário, encontrado a cada passo

intermediário. Existe uma memória no programa, que o faz comparar duas soluções intermediárias, e se estas diferenciarem entre si por uma norma inferior a uma tolerância pré-estabelecida, significa que a solução real foi encontrada, incrementando, assim, a distância de propagação, até chegar ao seu final.

A Fig. 4.8 mostra a evolução do sóliton espacial emanando com o algoritmo iterativo. Nesta figura utilizou-se os mesmos parâmetros anteriores, mas com um passo $\Delta z = 1 \mu\text{m}$.

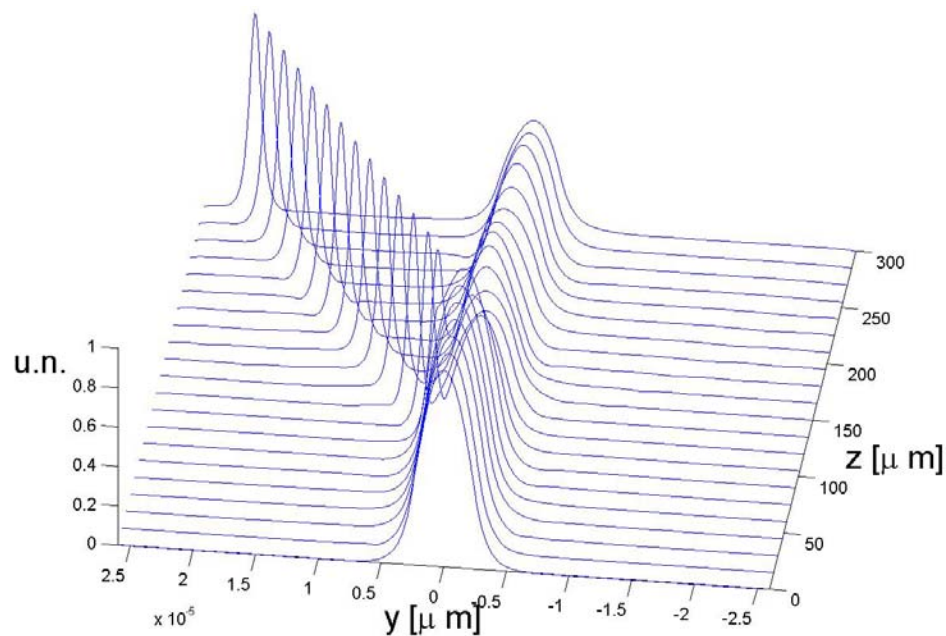


Fig. 4.8. Propagação de um feixe num guia de geometria mostrada na Fig. 4.3. $\Delta z = 1 \mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.

Como pode-se observar, a diferença é surpreendente, e, mesmo assim, o número total de iterações ainda é bem menor que todos os casos anteriores. Este programa mostrou ser bem mais rápido e eficiente. O número total de iterações (parâmetro p) não excedeu 2.000 (1.876 iterações), e o tempo de simulação foi de apenas alguns poucos minutos. O resultado obtido com o menor passo (fixo) demorou mais de uma hora, e, mesmo assim, não produziu resultado tão bom quanto este.

A Fig. 4.9 mostra o resultado para a propagação do feixe, na distância final de $300 \mu\text{m}$, com todos os resultados anteriormente obtidos. Os gráficos comparativos desta figura mostram a convergência do algoritmo aqui utilizado. Ele está bem superior aos outros, do ponto de vista de tempo de simulação e exatidão da solução real.

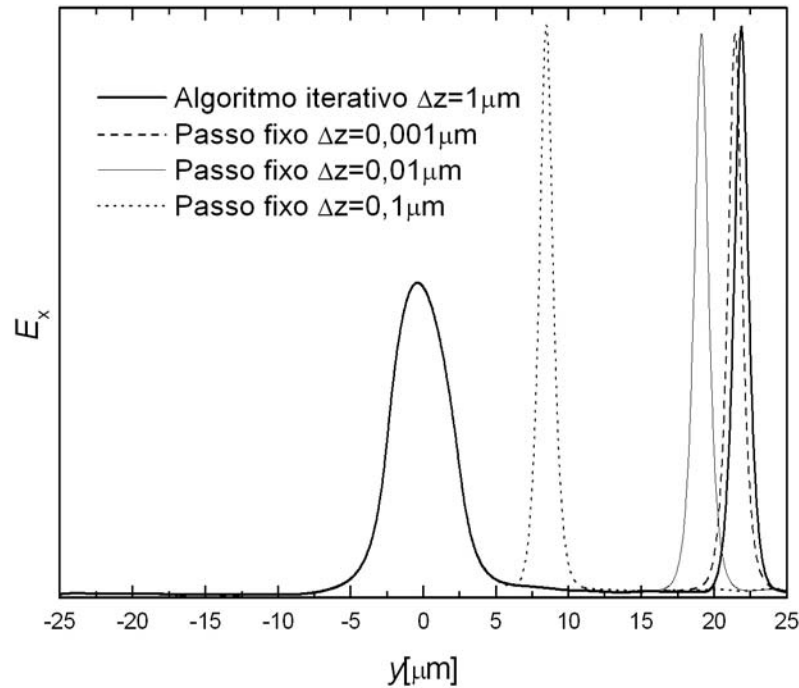


Fig. 4.9. Padrões do campo E_x , em $z = 300 \mu\text{m}$, para diferentes passos de propagação e algoritmos.

Por último, ressalta-se que os resultados foram obtidos com PMLs. Embora sendo o problema não-linear, a malha é unidimensional e, por conseguinte, as regiões das PMLs fazem fronteira apenas com dois pontos. Como consequência, a implementação das PMLs, a cada passo iterativo, é muito simples, pois basta o conhecimento do nível de campo em dois pontos, não dificultando em nada a sua implementação.

4.2.2. Propagador não-linear 2+1D

Uma vez feito o propagador (1+1)D, a idéia foi expandir as Equações (4.41)-(4.47) em mais uma dimensão, e implementar as mesmas características anteriormente colocadas. Em conjunto com um programa de análise modal linear 2D, o algoritmo iterativo e uma PML para meios não-lineares, conseguiu-se desenvolver um propagador

escalar (2+1)D não-linear com uma boa eficiência, sendo, inclusive, já utilizado em [64], mas para o caso linear.

Este propagador funciona como uma extensão do programa (1+1)D, mantendo-se as mesmas equações, de (4.41) a (4.47), com exceção de algumas modificações na Equação (4.41), para:

$$s \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2jkn_e s \frac{\partial \Psi}{\partial z} + s_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s_y}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + s_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_x}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + sk^2 [n_l^2(x, y) + f(a |\Psi|^2) - n_e^2] \Psi = 0, \quad (4.48)$$

e da Equação (4.43) para

$$\begin{cases} M = \sum_e \iint_e s \{N\} \{N\}^T dx dy \\ P = \sum_e \iint_e -\frac{s_y^2}{s} \{N\} \{N\}^T - \frac{s_x^2}{s} \{N\} \{N\}^T dx dy \\ K = \sum_e \iint_e sk^2 [n_l^2(x, y) + f(a |\Psi|^2)] \{N\} \{N\}^T dx dy \end{cases} \quad (4.49)$$

As simulações seguintes foram efetuadas considerando uma gaussiana, com potência grande o suficiente para excitar a não-linearidade, e observando a distância em que o feixe estabiliza-se. Uma diferença com o caso 1+1D é que a não-linearidade, aqui utilizada, é saturável (segundo tipo de não-linearidade na Tabela 4.1), com os seguintes dados: potência de 0,13 mW, $n_s = 1,55$, $n_{co} = 1,57$, $n_{cl} = 1,55$, $\lambda = 0,515 \mu\text{m}$, $n_2^I = 10^{-9} \text{m}^2/\text{W}$, $\Delta n_{sat} = 0,1$. Os parâmetros das PMLs foram $d = 1 \mu\text{m}$ e $R = 10^{-5}$ (refletividade).

A geometria do guia utilizado nas simulações seguintes é a mesma da Fig. 4.10, com $a = 2 \mu\text{m}$ e $b = 1,2 \mu\text{m}$. Os resultados estão abaixo ilustrados, nas Figs. 4.11 e 4.12.

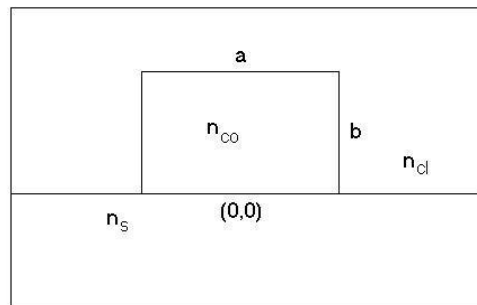


Fig. 4.10. Esquemático de um guia de onda 2D.

As Figs. 4.11 e 4.12 representam a propagação do mesmo feixe inicial propagante. Todavia, um passo grande, no esquema convencional, não é suficiente para provocar um deslocamento desta energia para a região de focalização, o que excitaria os chamados modos assimétricos. Nota-se que, na Fig. 4.11.c, foi propagada uma distância de $300\mu\text{m}$, mas esta apresenta o mesmo deslocamento da distância de $60\mu\text{m}$ com o algoritmo iterativo, representado pela Fig. 4.12.b.

Por fim, para as Figs. 4.12 o esquema iterativo possuiu uma solução que convergiu mais rapidamente, todavia com passo maior, assim como o que aconteceu na Fig. 4. 9. Naquilo que diz respeito ao tempo, é importante colocar o tempo gasto nessas simulações. Para o esquema de passo fixo, com 60.000 passos fixos de $0,005\mu\text{m}$, gastou-se mais de três dias de simulação, ao passo que, com o passo adaptativo, conseguiu-se cerca de 8.000 iterações e um tempo total de dezenove horas.

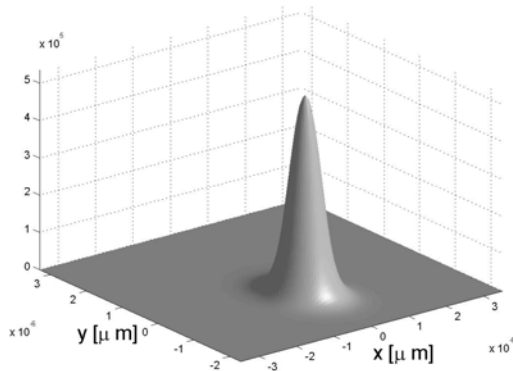


Fig. 4.11.a. Campo E_x em $z = 0\mu\text{m}$.

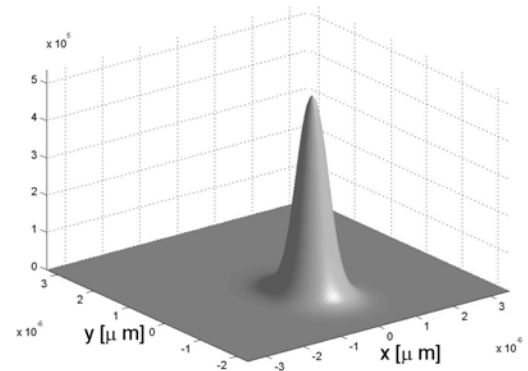


Fig. 4.12.a. Campo E_x em $z = 0\mu\text{m}$.

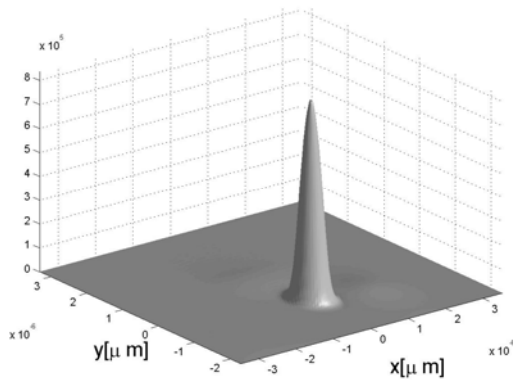


Fig. 4.11.b. Campo E_x em $z = 60\mu\text{m}$ para $\Delta z = 0,005\mu\text{m}$.

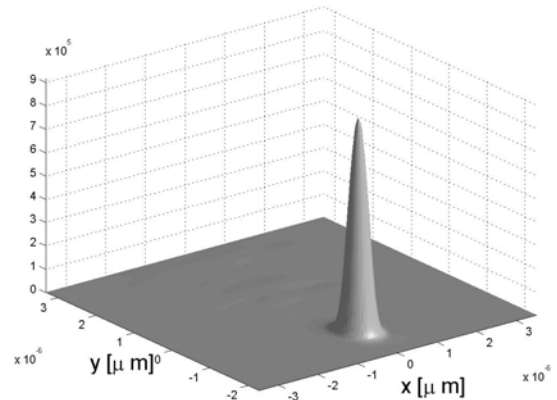


Fig. 4.12.b. Campo E_x em $z = 60\mu\text{m}$ para $\Delta z = 0,5\mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.

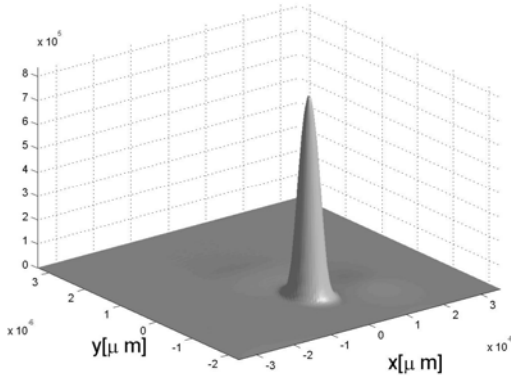


Fig. 4.11.c. Campo E_x em $z = 300 \mu\text{m}$ para $\Delta z = 0,005 \mu\text{m}$.

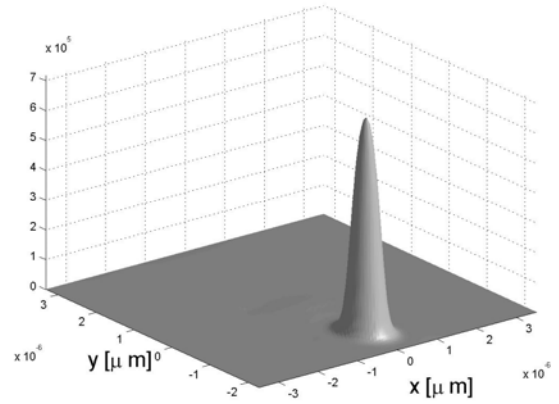


Fig. 4.12.c. Campo E_x em $z = 80 \mu\text{m}$ para $\Delta z = 0,5 \mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.

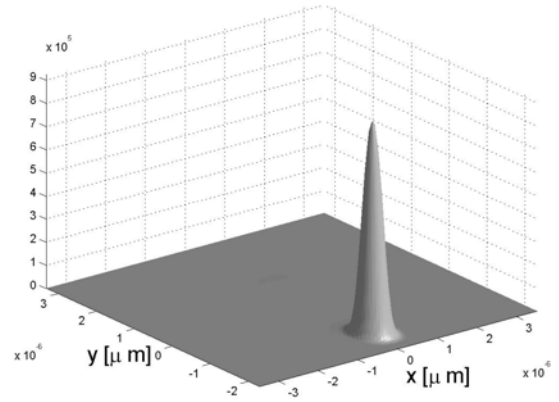


Fig. 4.12.d. Campo E_x em $z = 100 \mu\text{m}$ para $\Delta z = 0,5 \mu\text{m}$ com algoritmo iterativo.

4.2.3. PML não-linear

Embora não devidamente comentado na subseção anterior, todos os resultados lá obtidos utilizaram o novo esquema de PML não-linear, com a malha sendo bidimensional. Anteriormente, já foi mencionado que a PML tem o objetivo de casar o índice de refração da camada de PML com o índice do elemento ortogonal àquela região.

Na implementação do algoritmo, basicamente a idéia parte da suposição de manter uma malha convencional para a estrutura a ser simulada, apresentando apenas

uma modificação naquelas regiões às quais as PMLs pertencem. De acordo com a Fig. 4.13, as regiões das PMLs devem possuir o que se chama de “malha estruturada”, onde este porquê é explicado a seguir.

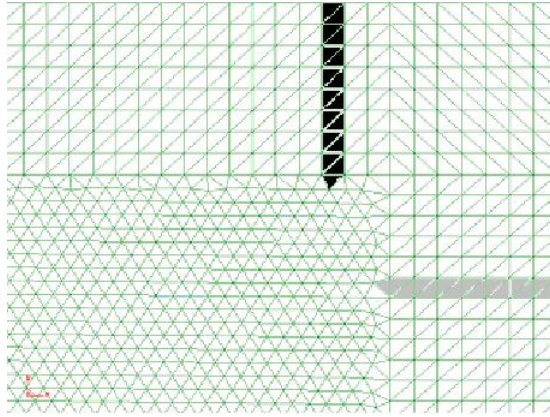


Fig. 4.13. Exemplo parcial de uma malha usada para a PML adaptativa.

Da formulação nodal no Método dos Elementos Finitos sabe-se que o campo calculado está presente em cada nó e, por conseguinte, cada elemento possuirá um índice de refração diferente, uma vez que a média dos campos nos nós do elemento definirá seus próprios índices.

Também é fato conhecido que a absorção das ondas incidentes, em uma PML, é independente do ângulo de incidência [44], mas as PMLs devem possuir o mesmo índice de refração da região fronteira com ela (ver Equação (4.39)). Desta forma, com uma malha estruturada (composta de triângulos retângulos) e um complexo algoritmo, mas muito rápido, conseguiu-se montar uma subrotina que identifica o valor de índice de refração que cada elemento da PML deve possuir, a partir da distribuição de índice que existe nos elementos pertencentes às bordas das PMLs.

Basicamente, a funcionalidade do algoritmo pode ser entendida observando as duas regiões sombreadas na Fig. 4. 13. Em princípio, faz-se normalmente a malha da região de interesse, mas as regiões das PMLs devem consistir em malhas estruturadas, formadas por triângulos retângulos. As PMLs são compostas de triângulos retângulos, pois isso garante que sempre haverá um casamento do índice de refração da região fora das PMLs com aquela dentro das PMLs, de maneira ortogonal.

Do ponto de vista da simulação, usando o esquema de passo adaptativo (representado na Fig. 4.7), ou não, segue-se normalmente o processo para a

montagem das matrizes do sistema linear a ser resolvido, mas sempre, antes de montá-las, chama-se a subrotina de casamento de índice para adaptar as PMLs.

Para conseguir o casamento de índice, a subrotina identifica todas as arestas (e seus nós) dos elementos pertencentes às regiões de fronteira com as PMLs, bem como o tipo de cada PML os quais delimita. Em seguida, existe um *loop* que varre todos os elementos, verificando, ou não, se este pertence às PMLs. Caso pertença, este fica indexado ao elemento que faz fronteira com tal PML (já identificado anteriormente). Esse processo é feito apenas uma vez, e só depende da malha. Daí em diante, basta acessar essa informação quando for necessário modificar o índice de refração dos elementos pertencentes às PMLs.

A Tabela 4.3 ilustra o principal resultado da subrotina e torna um pouco mais clara a idéia central da subrotina. Essa tabela pode ser entendida como uma variável matricial de dimensão $n_{el} \times 3$. A primeira coluna indica todos os elementos da malha, ao passo que as segunda e terceira colunas referenciam os elementos cujos índices de refração indexam o elemento da primeira coluna.

Elemento	Depende do Elemento-1	Depende do Elemento-2
1	1	1
2	2	2
...
43	15	15
44	15	15
...
74	23	34
...
100	100	100

Tabela 4.3. Esquema da variável que indexa a dependência entre os elementos.

Para entender melhor, suponha os dados da primeira linha da tabela. Ela indica que o índice de refração do elemento 1 da malha depende dos índices de refração dele mesmo (colunas 2 e 3 valem 1), ou seja, o elemento 1 não é uma região de PML. O mesmo ocorre com o elemento 100. Por outro lado, o índice de refração do elemento 74

depende do índice de refração dos elementos 23 e 34, o que certamente indica que o elemento 74 pertence a uma região de PML, assim como os elementos 43 e 44.

Até o momento, talvez devido às particularidades, não foi encontrado nenhum estudo parecido na literatura, e, o que existe de PML não-linear, é apenas em uma dimensão de discretização. Para situações 2D em meios não-lineares, o que as vezes é feito são PMLs lineares de largura maior, para tentar compensar a diferença de índice, mas seu resultado não é perfeito.

Para ilustrar especificamente as novas PMLs implementadas, além daqueles resultados já obtidos na Seção 4.2.2, fez-se uma malha que simula um meio não-linear sem fronteiras e colocou-se um feixe gaussiano para ir de encontro direto às paredes. Os resultados mostrados a seguir foram idealizados com uma PML de largura $1\ \mu\text{m}$ e comprimento de onda usado de $0,5\ \mu\text{m}$.

A Fig. 4. 14 representa a evolução de um feixe gaussiano inicialmente colocado no ponto (0,0), com largura de $1\ \mu\text{m}$, viajando de encontro à parede x . O ângulo de observação é de 0° em ambas elevação e azimute. Visualmente não existe nenhuma reflexão, mas numericamente, embora não ilustrado, a reflexão ocorre na centésima parte da amplitude do campo.

A Fig. 4.15 representa a mesma gaussiana anterior, mas agora viajando em direção à parede perpendicular ao eixo y . Nessa situação o ângulo de observação é de 0° e 90° na elevação e azimute, respectivamente. Assim como na situação anterior, também notou-se uma reflexão numérica baixíssima.

Nas Figs. 4.16 e 4.17 tem-se a última ilustração dos testes realizados da nova PML não-linear. O feixe gaussiano foi lançado de encontro às quinas. Nessa região a reflexão também foi pequena e apresentou bons resultados; todavia, o coeficiente de reflexão foi levemente maior que nos outros dois casos, da ordem de uma septuagésima parte.

A ilustração da Fig. 4.16 foi feita propositalmente, uma vez que a função *surf* utilizada do Matlab, verifica a mais sensível das variações, devido a um esquema especial de luminosidade. Os mesmos resultados estão mostrados na Fig. 4.17, onde claramente nota-se que os resíduos não são tão grandes assim.

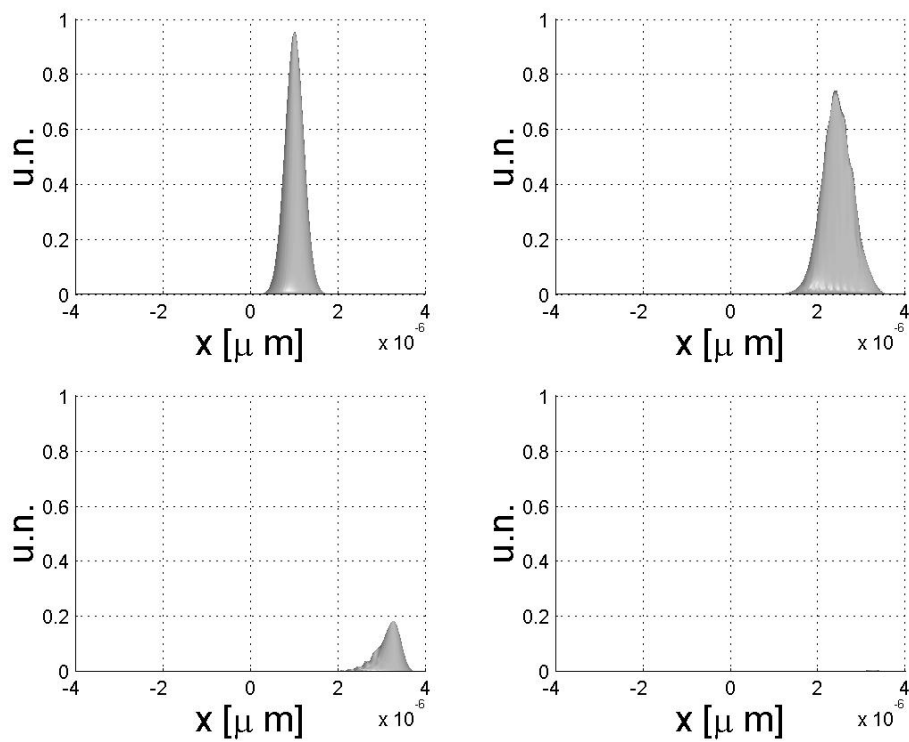


Fig. 4.14. Feixe gaussiano viajando de encontro à parede x .

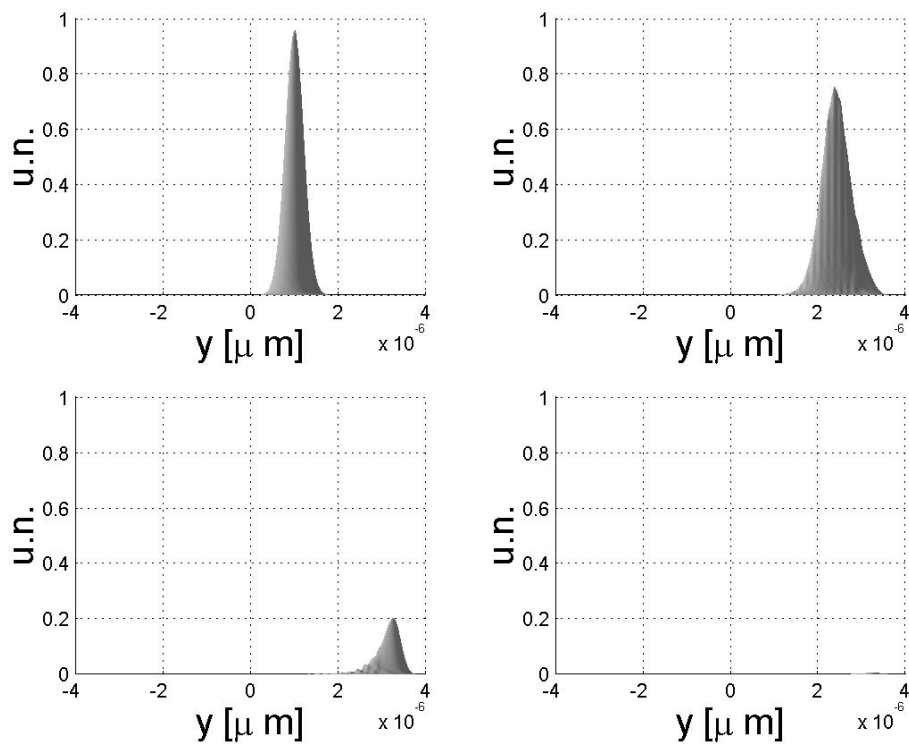


Fig. 4.15. Feixe gaussiano viajando de encontro à parede y .

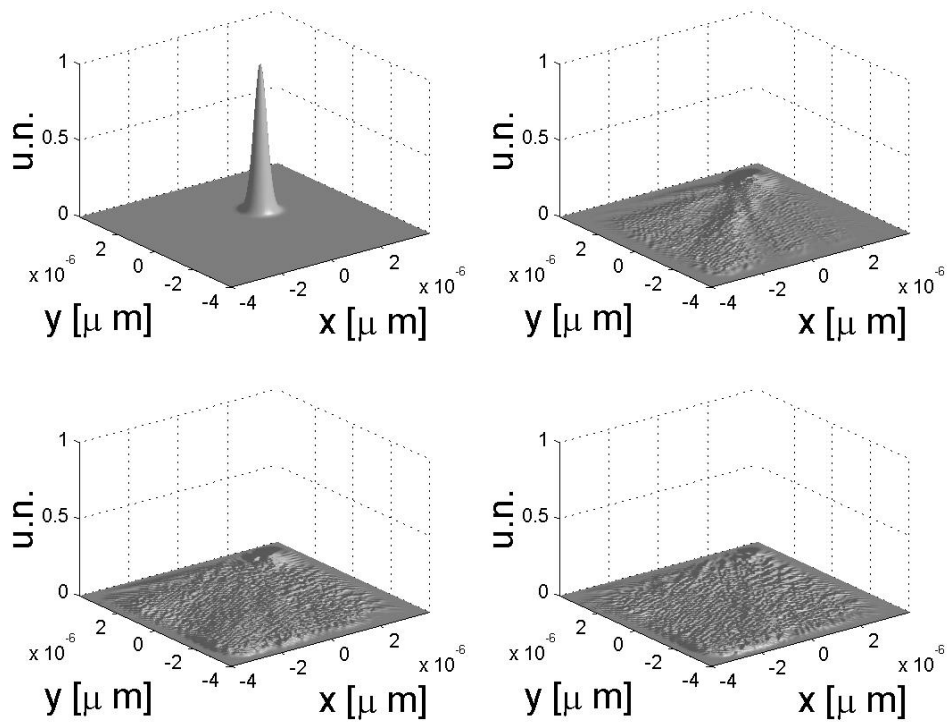


Fig. 4.16. Feixe gaussiano viajando de encontro às quinas da janela computacional.

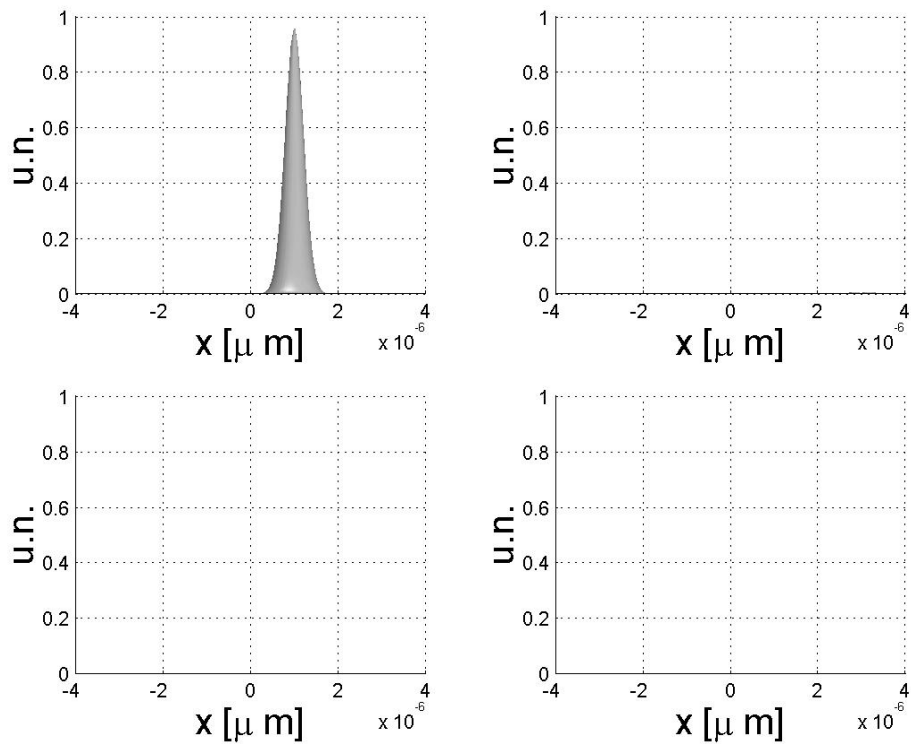


Fig. 4.17. Feixe gaussiano viajando de encontro às quinas da janela computacional, com outro ângulo de visualização .

Em suma, o exemplo desta gaussiana foi considerado com o intuito de testar mais fortemente a eficiência da técnica aqui desenvolvida, não comprometendo os resultados, quando a simulação em um guia de onda é executada, conforme os resultados da subseção anterior.

4.3. Conclusões

Neste capítulo, ao contrário do que foi visto nos outros três capítulos anteriores, foram implementadas ferramentas que utilizam a concepção dos elementos finitos, bem como algumas aplicações previamente estudadas.

Em princípio, este capítulo foi devotado ao conhecimento geral das relações constitutivas básicas, quando meios não-lineares estão envolvidos, relacionando potência, densidade de potência e alguns dos mais utilizados tipos de não-linearidades.

Em seguida, utilizando os conceitos prévios, implementou-se e testou-se dois propagadores não-lineares escalares, 1+1D e 2+1D, utilizando algumas novidades, como um passo de propagação adaptativo e técnicas de PMLs para meios não-lineares. No passo adaptativo, mostrou-se como esta técnica pode ser importante para otimizar o tempo total de simulação, sem requerer uma grande dificuldade de implementação computacional. Já para as PMLs, o grande mérito foi na montagem de uma subrotina em FORTRAN que efetua o casamento de índice de refração para situações não-lineares.

-
-
-

Capítulo 5 – Cristais fotônicos e aplicações

Neste capítulo, serão comentados os últimos resultados relativos a esta tese, consistindo na aplicação conjunta do Método dos Elementos Finitos e cristais fotônicos na concepção de dispositivos ópticos. Em princípio, pode-se citar duas contribuições:

- 1- Utilização de cristais fotônicos para reduzir valores de potência crítica no efeito de biestabilidade óptica em guias ópticos integrados não-lineares;
- 2- Concepção de um novo tipo de fibra óptica monomodal de cristais fotônicos, operando em tal regime com uma maior região de invariância de modo.

Sendo assim, este capítulo está organizado em duas seções principais, ambas explorando aspectos de análise modal.

5.1. Cristais fotônicos em guias planares

Uma análise dos possíveis modos em guias de ondas ópticos invariantes longitudinalmente ($\partial/\partial z = 0$) é indispensável para o projeto de guias de ondas, sendo reportados inúmeros métodos e suas revisões na literatura [51]-[53]. Basicamente, existem dois processos utilizados para encontrar as soluções estacionárias, no caso não-linear.

Numa primeira forma, bastante detalhada em [54], o método simplesmente baseia-se em especificar a potência, P , e encontrar a constante de propagação, β . No entanto, este procedimento só leva a uma solução consistente nos modos estáveis; naqueles em que a biestabilidade está presente (para um valor de potência, existem três diferentes valores de β) a solução não converge, não sendo possível, assim, notar

o “S” da biestabilidade. Mesmo assim, esse método ainda é bastante utilizado hoje em dia [53].

Um segundo método, mais refinado e exato, baseia-se em escolher a constante de propagação e encontrar a potência para aquele modo. Este procedimento foi primeiramente verificado em [55], produzindo resultados melhores que aqueles utilizando o método anterior. Nesse segundo método, as equações algébricas não-lineares são resolvidas mais eficientemente, como equações lineares, utilizando esquemas de iteração não-linear para levar em conta a não-linearidade do material até que um certo valor de convergência seja atingido. Nesta tese, utilizou-se este segundo processo para a análise modal 2D em guias não-lineares.

Na análise modal encontrou-se as soluções estacionárias da equação não-linear de Helmholtz usando a seguinte equação algébrica, com $\partial/\partial z = 0$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + [k^2 n_l^2(x, y) + k^2 f(a | E |^2) - \beta^2] E = 0, \quad (5.1)$$

onde $E(x, y)$ é o campo elétrico escalar, β é a constante de propagação, k é o número de onda, $n_l^2(x, y)$ a distribuição de índice de refração linear e a função $f(a | E |^2)$ descreve a não-linearidade, assim como na Tabela 4. 1, a assume o valor $a = n_l^2 n_2^I c \epsilon_0$, e n_2^I é o coeficiente não-linear do meio ($[n_2^I] = \text{m}^2/\text{W}$).

Em princípio, considerou-se um material com não-linearidade saturável, dada por:

$$f(a | E |^2) = 2n_l \Delta n_{sat} \left[1 - \exp\left(-\frac{a | E |^2}{2n_l \Delta n_{sat}}\right) \right], \quad (5.2)$$

sendo $\Delta n_{sat} = \delta n_l$, a máxima variação não-linear no índice de refração não-linear. Como parte do processo de discretização do Método dos Elementos Finitos (MEF), num próximo passo deve-se escrever:

$$E(x, y) = A \Psi(x, y), \quad (5.3)$$

onde $\Psi(x, y)$ é um campo normalizado, satisfazendo:

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\Psi(x, y)|^2 dx dy = 1. \quad (5.4)$$

Deste modo, baseado nos comentários do capítulo anterior, a potência modal para o modo TE é dada por:

$$P = \frac{\beta}{2\mu_0\omega} |A|^2 . \quad (5.5)$$

Pode-se verificar que a Equação (5.5) é semelhante à Equação (4.26). Isto acontece pois, com o método utilizado, o campo Ψ deve ser normalizado a cada novo incremento de potência, que é diretamente relacionado à amplitude A .

Com a normalização dada por (5.4), a equação a ser resolvida passa a ser descrita como:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + [k^2 n_l^2(x, y) + k^2 f(aA^2 |\Psi|^2) - \beta^2] \Psi = 0 . \quad (5.6)$$

Conforme mencionado, neste método é assumido um dado valor de β e, então, resolve-se a Equação (5.6) para os apropriados valores de A e Ψ . O esquema de iteração é mostrado na seguinte equação:

$$-\frac{\partial^2 \Psi_{m+1}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{m+1}}{\partial x^2} + [\beta^2 - k^2 n_l^2(x, y)] \Psi_{m+1} = A_{m+1}^2 \left[\frac{k^2 f(aA_m^2 |\Psi_m|^2)}{A_m^2} \right] \Psi_{m+1} . \quad (5.7)$$

Neste esquema, inicialmente encontra-se Ψ_0 e A_0 , utilizando estes valores para dar continuidade à Equação (5.7). Tais valores correspondem ao caso da análise linear, desprezando a não-linearidade ou, em outras palavras, desprezando a variação do índice de refração com a potência. Para o problema expresso pela equação acima, o autovalor correspondente é A_{m+1}^2 , e o autovetor é Ψ_{m+1} . A cada novo passo, Ψ é normalizado de acordo com (5.4) e o sistema é realimentado novamente até traçar a curva total de dispersão. A seguir, estão mostrados alguns modos, com alguns valores de não-linearidade saturável. A não-linearidade Kerr não foi usada neste caso, pois seus modos apresentam instabilidade no caso 2D.

As ilustrações subsequentes foram realizadas com $n_{co} = 1,57$, $n_{cl} = 1,55$ e $n_{sub} = 1,55$. Apenas o substrato é não-linear, e apresenta um valor de $n_2^l = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{W}$ e $\Delta n_{sat} = 0,1$ com a não-linearidade dada por (5.2). O comprimento de onda utilizado em todas as simulações foi de $\lambda = 0,515 \text{ }\mu\text{m}$. O guia possui largura a e altura b . Um esquemático geral desse guia está mostrado na Fig. 5.1.

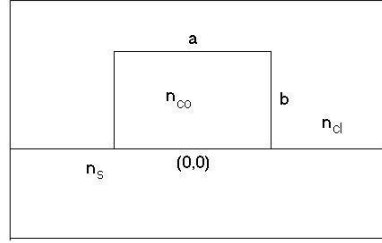


Fig. 5.1. Seção transversal de um guia de onda planar não-linear.

Nas Figs. 5.2 observa-se que o modo do guia sempre tende a seu estado de energia mais alta, quando as potências envolvidas são mais elevadas. Nota-se, também, a influência das dimensões da largura e da altura do guia de onda, sendo a altura um fator mais crítico para a biestabilidade, neste tipo de estrutura.

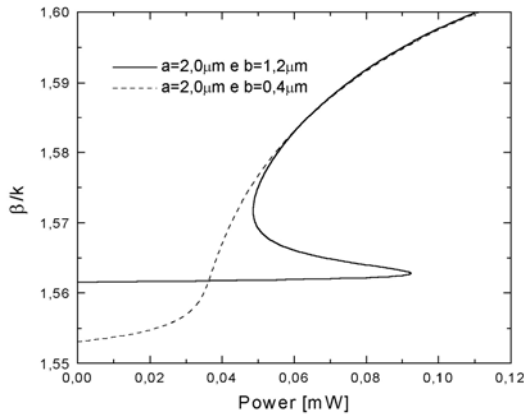


Fig. 5.2.a. Índice de refração efetivo como função da potência, modificando a altura, b , do guia.

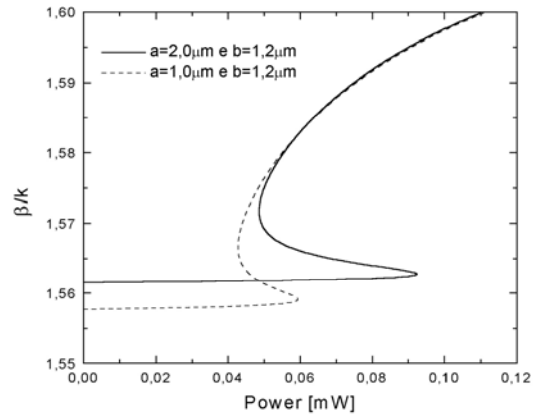


Fig. 5.2.d. Índice de refração efetivo como função da potência, modificando a largura, a , do guia.

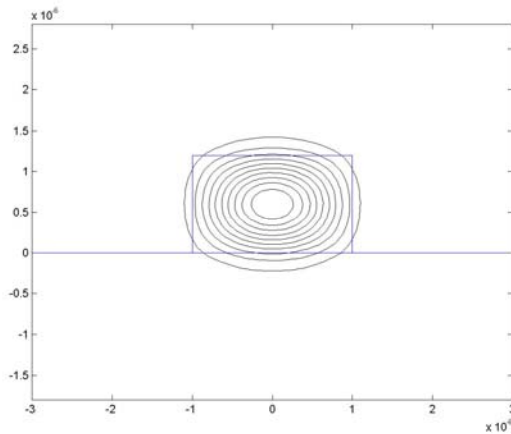


Fig. 5.2.b. Modo da Fig. 5. 1 operando no regime linear, $a = 2,0 \mu\text{m}$ e $b = 1,2 \mu\text{m}$.

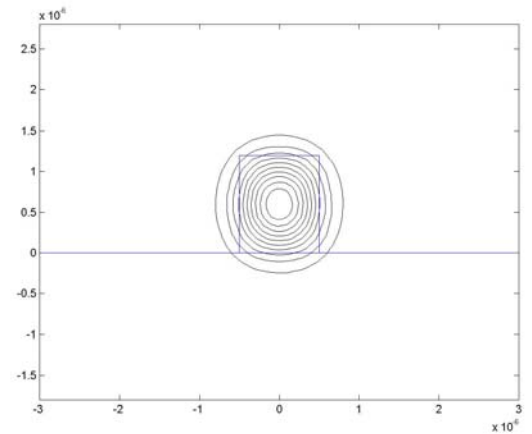


Fig. 5.2.e. Modo da Fig. 5.1 operando no regime linear, $a = 1,0 \mu\text{m}$ e $b = 1,2 \mu\text{m}$.

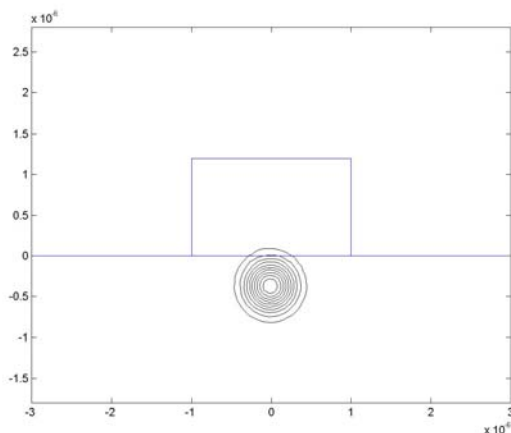


Fig. 5.2.c. Modo da Fig. 5. 1 operando no regime não-linear, $a = 2,0 \mu\text{m}$ e $b = 1,2 \mu\text{m}$.

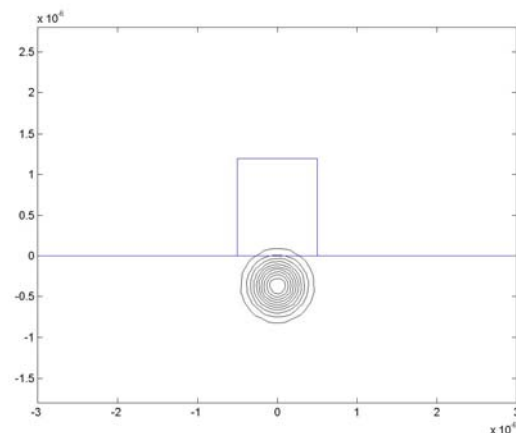


Fig. 5.2.f. Modo da Fig. 5. 1 operando no regime não-linear, $a = 1,0 \mu\text{m}$ e $b = 1,2 \mu\text{m}$.

Àqueles que não conhecem, um sistema biestável é aquele que tem uma saída que aceita dois valores distintos (os chamados “estados”), não importando que entrada seja aplicada. Quando o nível de potência da entrada ultrapassa o limiar v_2 , o dispositivo muda seu estado para o nível mais alto de energia. Se a potência é, então, diminuída para um valor abaixo do limiar v_1 , o dispositivo chaveia para o estado de mais baixa energia. Entre os limiares v_1 e v_2 os dois estados são possíveis, mas vai depender da história da entrada. Isso fica claro na Fig. 5. 3.

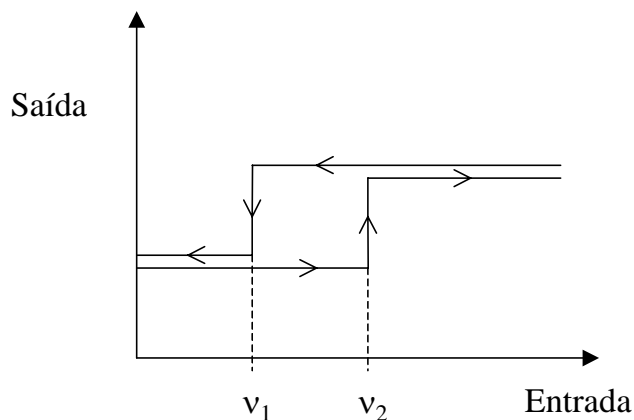


Fig. 5.3. Esquema básico de uma operação com comportamento biestável.

De fato, a biestabilidade dá margem para a concepção de alguns dispositivos completamente ópticos, onde luz controla luz. Esses dispositivos podem operar em diferentes funções como: elementos para memória óptica, portas lógicas, chaveamento óptico, processamento de sinais, laser pulsados, etc. Em geral, seu princípio de

funcionamento baseia-se em realimentação ou em dispositivos não-lineares. Maiores informações podem ser encontradas em [56]-[57].

Dentre algumas das funcionalidades acima colocadas, o sistema, para ser factível, deve possuir: i) potência óptica de operação suficientemente pequena, devido às potências ópticas envolvidas; ii) energia total de operação também relativamente baixa, para possibilitar dissipação térmica e diminuir as perdas e iii) compatibilidade com os outros dispositivos do sistema.

Dentro de toda a teoria estudada durante este trabalho, bem como da utilização de cristais fotônicos em dispositivos de óptica integrada, foi aqui proposto modificar uma clássica topologia de um guia de onda planar para diminuir a potência crítica de chaveamento do dispositivo operando num caráter biestável.

Sendo assim, pensou-se em um dispositivo capaz de reduzir o nível de potência v_2 baseado no uso conjunto de cristais fotônicos e de suas características ressonantes, mas mantendo os mesmo níveis de não-linearidade e dimensões. A atuação conjunta desses efeitos mostrou ser suficiente para melhorar as características de chaveamento.

De fato, estudou-se diversas topologias para introduzir os cristais fotônicos, e os seus espaçamentos foram baseados na Condição de Bragg [57], com perturbações circulares e quadráticas. Como consequência, obtiveram-se os resultados mostrados mais adiante. As topologias propostas são modificações da Fig. 5. 1, estando ilustradas nas Figs. 5.4.a e 5.4.b.

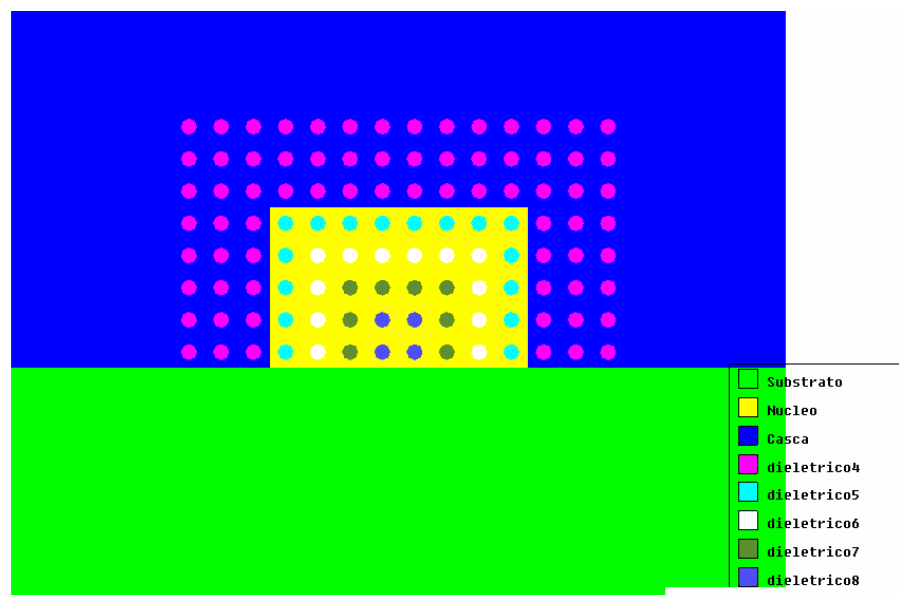


Fig. 5.4.a. Ilustração do guia de onda proposto, perturbação circular.

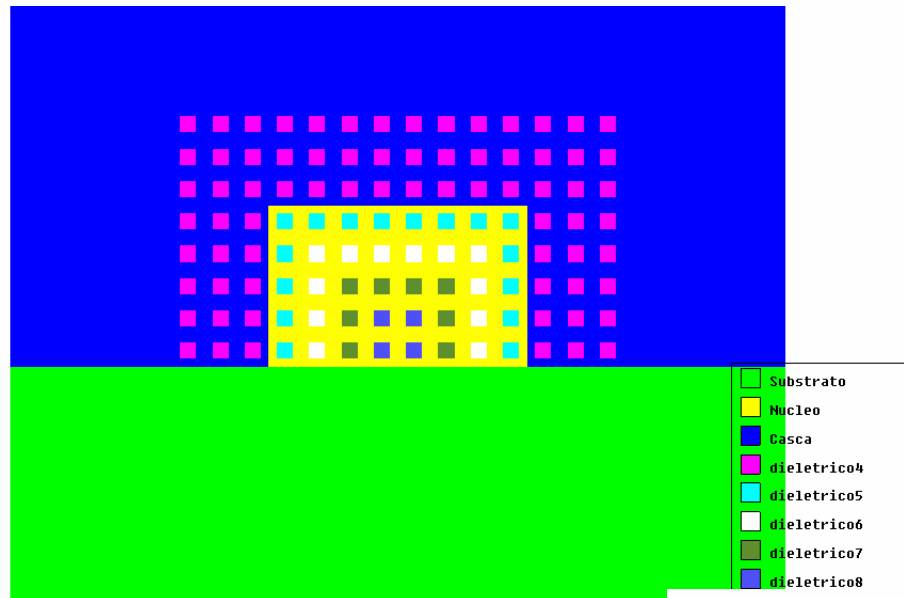


Fig. 5.4.b. Ilustração do guia de onda proposto, perturbação quadrangular.

Nessas estruturas, colocou-se um perfil periódico de índice de refração na região da casca e outras variações na região do núcleo, considerando perturbações quadrangulares e circulares. Em ambas estruturas, as dimensões utilizadas para a largura e altura do guia foram $a = 2 \mu\text{m}$ e $b = 1,25 \mu\text{m}$. Nas figuras ilustradas anteriormente, as legendas diferenciam os índices de refração para as camadas dos dielétricos 4, 5, 6, 7 e 8. O dielétrico 4 está localizado na região da casca do guia original, ao passo que os dielétricos 5, 6, 7 e 8 na região interna ao núcleo. Na sequência, foram consideradas as topologias circulares e quadrangulares, para as perturbações nos índices de refração do núcleo e da casca.

Na Fig. 5.5.a, a perturbação é introduzida apenas ao longo do núcleo com uma topologia circular. No dielétrico 4, é mantido fixo o índice de refração $n = 1,55$, ao passo que os dielétricos 5, 6, 7 e 8 apresentam entre si os mesmos valores de índice de refração. Essa topologia apresenta duas características: a primeira é que a potência crítica diminuiu com o decréscimo do índice de refração (3 vezes menor), e há, também, uma redução do “S” da biestabilidade.

Na Fig. 5.5.b, a perturbação é introduzida ao longo da casca; desta forma os dielétricos 5, 6, 7 e 8 permaneceram inalterados. A casca, onde o dielétrico 4 está inserido, possui $n = 1,55$. Quando o valor de índice de refração do dielétrico 4 é menor

que o da casca, nota-se a diminuição da potência crítica da biestabilidade; caso contrário, este fato não acontece.

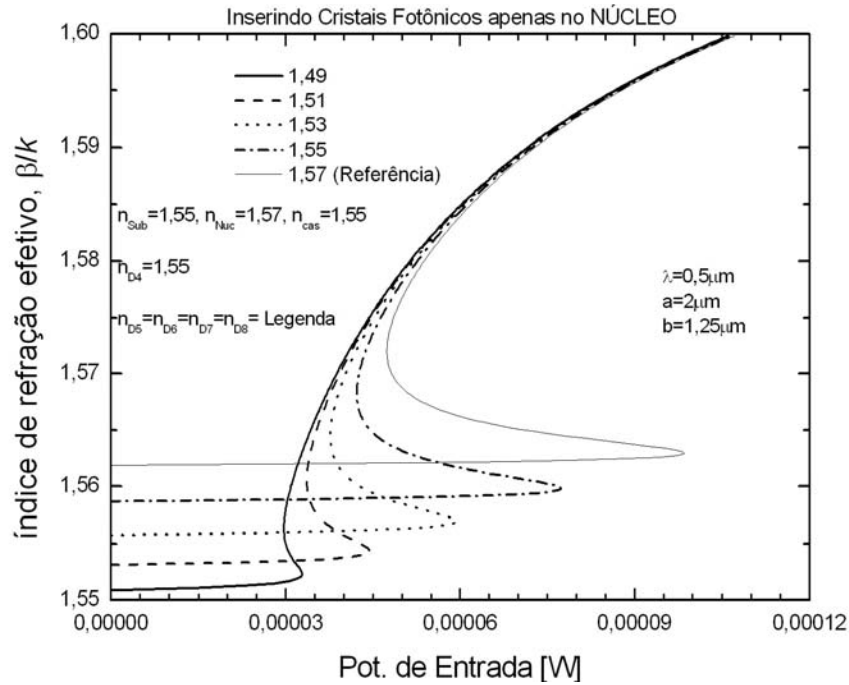


Fig. 5.5.a. Índice de refração efetivo considerando perturbação circular apenas no núcleo.

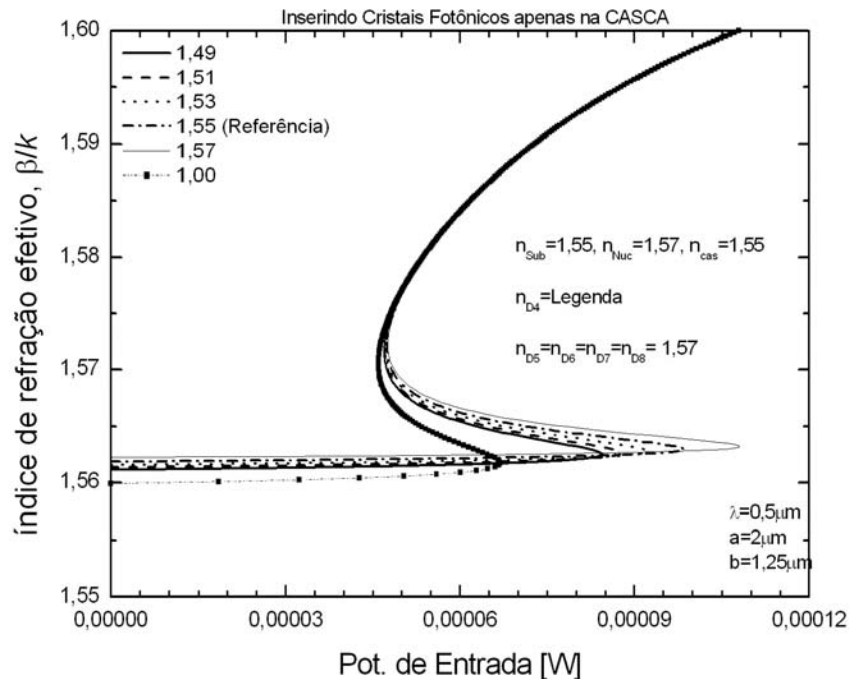


Fig. 5.5.b. Índice de refração efetivo considerando perturbação circular apenas na casca.

Nas Figs. 5.5.c e 5.5.d, o dielétrico 4 é mantido com o mesmo valor de índice da casca, e avaliou-se a influência quando apenas algumas camadas de perturbação são

introduzidas no núcleo, modificando, assim, os dielétricos 5, 6, 7 e 8. Observando a Fig. 5.4.a, nota-se que as perturbações são introduzidas uma a uma, indo na direção do núcleo para a casca, considerando dois valores de índice de refração $n = 1,49$ e $n = 1,55$, nas Figs. 5.5.c e 5.5.d, respectivamente.

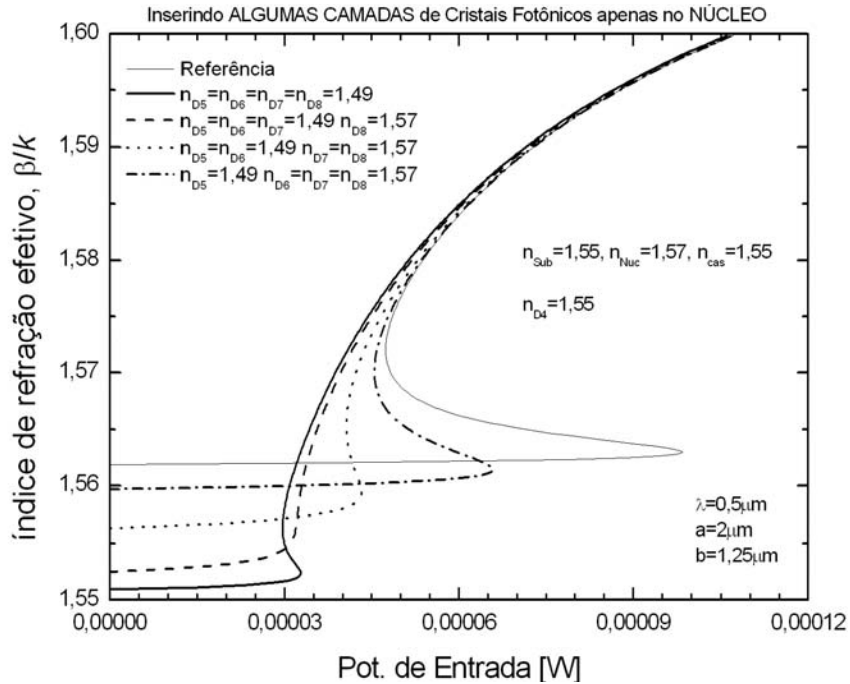


Fig. 5.5.c. Índice de refração efetivo considerando perturbação circular em algumas camadas do núcleo.

Destas figuras, observa-se que, aumentando o número de camadas, diminui-se a potência crítica. Todavia, existe um limiar, lembrando uma condição de ressonância, pois, com três camadas, a potência crítica é menor que com quatro camadas.

Em princípio, observando novamente a Fig. 5.4.a, percebe-se que quatro camadas preenchem toda a região do núcleo, lembrando uma cavidade ressonante, reforçando a observação feita no parágrafo anterior. Os efeitos são mais visíveis na Fig. 5.5.d, uma vez que o fenômeno da biestabilidade é mais presente, embora o comportamento qualitativo mostrou ser o mesmo da Fig. 5.5.c.

Nas Figs. 5.6, a análise é semelhante às das Figs. 5.5, mas considerando perturbações do tipo quadrangular, semelhante à Fig. 5.4.b. A Fig. 5.6.a possui uma perturbação apenas na região do núcleo, assim como na Fig. 5.5.a. Basicamente, estas figuras possuem comportamentos semelhantes a respeito das potências críticas, mas, na geometria da Fig. 5.6.a, nota-se que a biestabilidade tende a desaparecer

quando os valores de índice são da ordem de 1,51, ou menor, mostrando a importância da geometria neste tipo de estrutura.

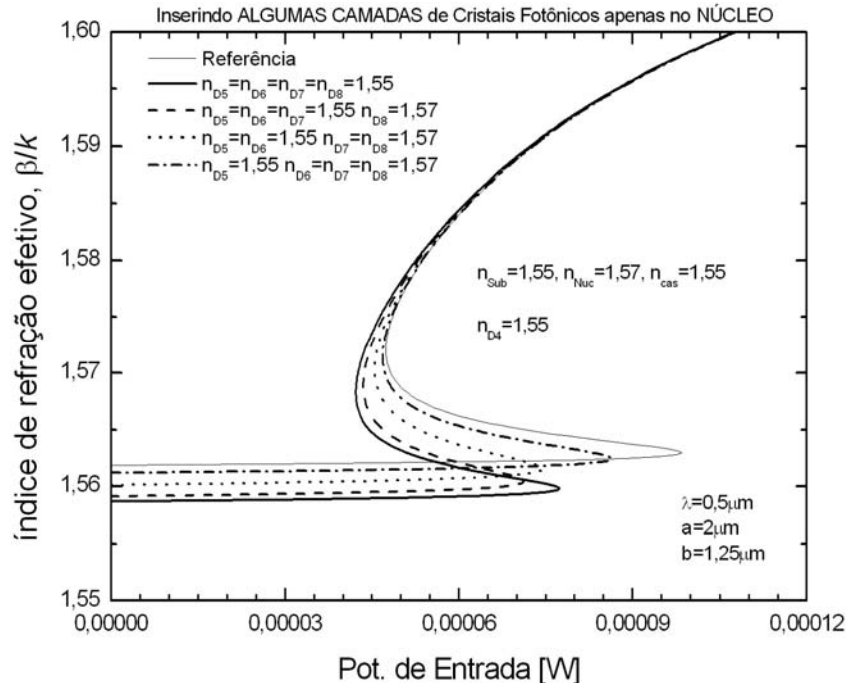


Fig. 5.5.d. Índice de refração efetivo considerando perturbação circular em algumas camadas do núcleo.

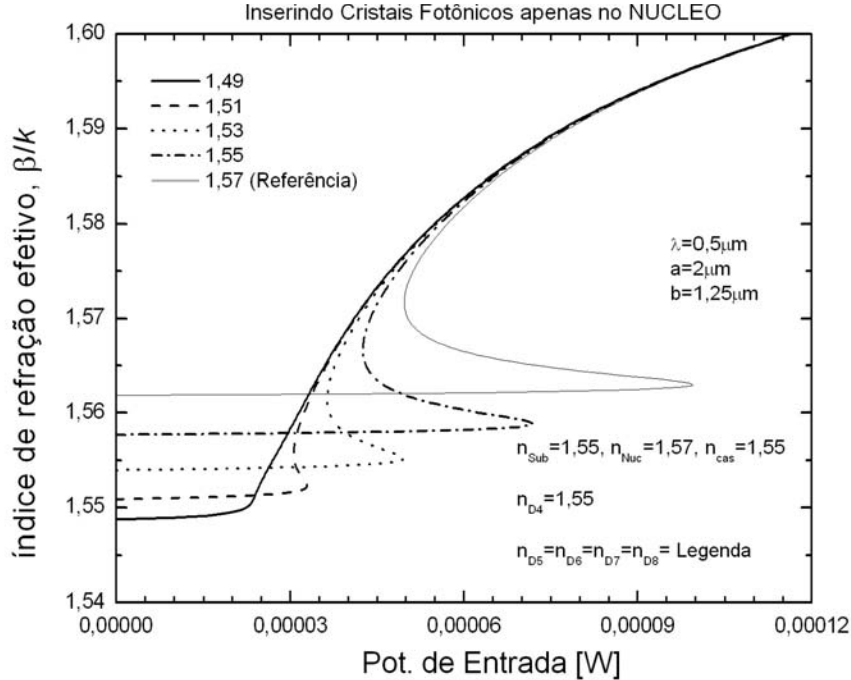


Fig. 5.6.a. Índice de refração efetivo considerando perturbação quadrangular apenas no núcleo.

A Fig. 5.6.b mostra o comportamento quando colocou-se a perturbação apenas na região da casca, e, assim como no seu análogo com a geometria circular, Fig. 5.5.b,

esta mostrou um comportamento semelhante àquela configuração. Basicamente, o que pode-se perceber são variações das formas presentes no “S” da biestabilidade, certamente influenciadas pela diferente geometria.

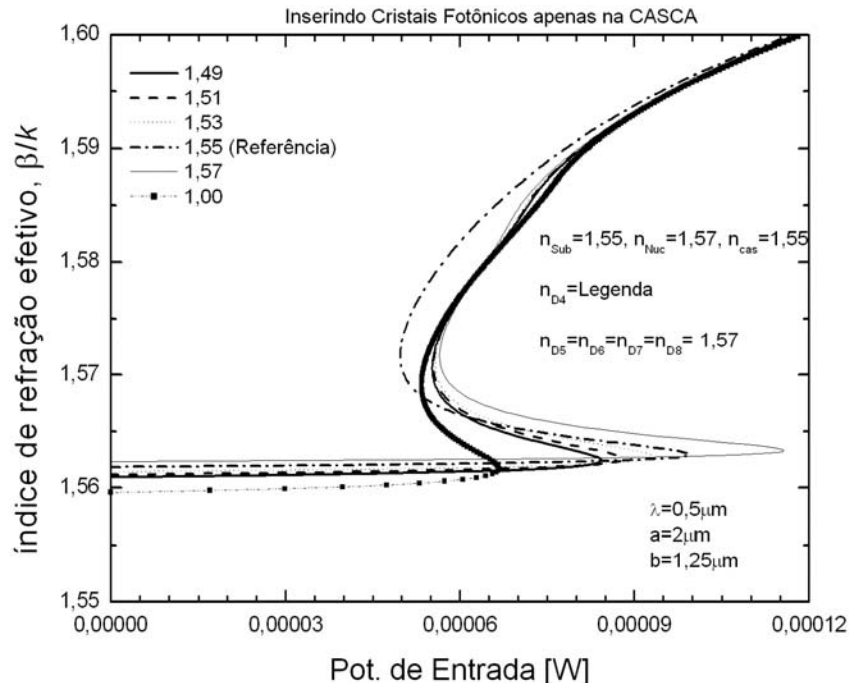


Fig. 5.6.b. Índice de refração efetivo considerando perturbação quadrangular apenas na casca.

Por último, a Fig. 5.6.c é semelhante a ambas as Fig. 5.5.c e Fig. 5.5.d. Conforme visto anteriormente, o comportamento qualitativo é semelhante; por este motivo, não são ilustradas duas figuras com perturbações de índice de refração ao longo da região do núcleo. De fato, a figura acima tem uma comparação direta com a Fig. 5.5.d, pois utiliza o mesmo índice de refração diferenciando apenas a geometria das perturbações, sendo possível verificar efeitos semelhantes, variando o número de camadas de cristais fotônicos inseridos.

Relacionando todas as figuras anteriores, o que pode-se afirmar é que os resultados mostraram-se coerentes com dois artigos na literatura, que estudam a influência das geometrias em condições ressonantes, para filtros [58]-[59].

Naquela ocasião, os autores mostraram que a geometria da perturbação melhora, ou não, as condições ressonantes, baseados em Óptica de Fourier, i.e., se a distribuição de campo é circular, perturbações circulares entram melhor em ressonância do que as quadrangulares, por exemplo. Essa importante colocação dá margem, inclusive, para futuros testes, como estruturas elípticas, ao invés de circulares. Além

disso, também comentou-se que, na prática, não se precisa de infinitas camadas para conseguir um resultado satisfatório; em torno de quatro já começam a aparecer bons efeitos.

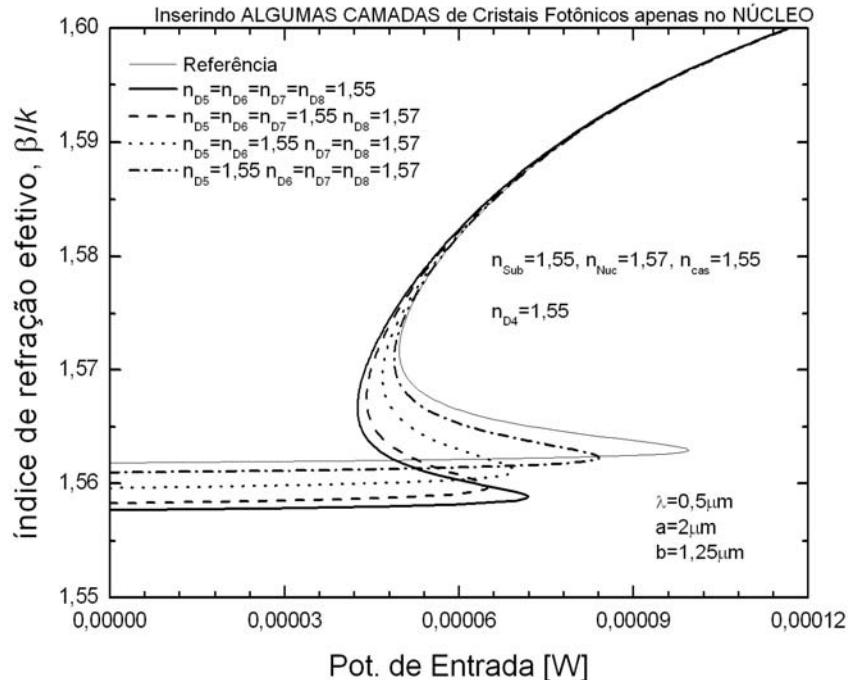


Fig. 5.6.c. Índice de refração efetivo considerando perturbação quadrangular em algumas camadas do núcleo.

Em suma, outros estudos a respeito desse tipo de estrutura ainda são requeridos, levando em conta efeitos como maiores contrastes de índice de refração (da ordem de duas unidades), efeitos de anisotropia, outros tipos de não-linearidade, análise vetorial, outras geometrias, etc.

5.2. Cristais fotônicos em fibras ópticas

Fibras de cristais fotônicos (PCFs) foram propostas por Russel, e seu grupo, em 1992. Contudo, um primeiro exemplo prático foi efetuado em 1995 e divulgado em 1996 [65]. Desde então, este novo tipo de fibra tem sido extensivamente estudada e investigada. Existem muitos tipos de PCFs com diferentes geometrias e mecanismos de propagação, que têm sido propostos de acordo com a aplicação, tais como fibras

monomodais “infinitas” [66], birrefringentes, altamente não-lineares, grande área modal efetiva, e de dispersão plana [67]-[69].

Em sua concepção geral, as PCFs possuem buracos de ar periodicamente arrançados em torno de um núcleo. Esta estrutura periódica funciona de maneira semelhante aos elétrons em um cristal de semiconductor. Inicialmente, apenas o efeito de *photonic bandgap*, (PBG), foi considerado como mecanismo guiante para este tipo de fibra. Todavia, depois, foi descoberto que estas fibras poderiam ter características bastante interessantes, baseadas somente no princípio convencional de reflexão total.

Aplicações requerendo altos níveis de potência de bombeio em fibras monomodais, com uma área efetiva grande, são um exemplo típico, no qual o desempenho é limitado pelo quão pequeno e bem controlado pode ser o passo do índice de refração entre a casca e o núcleo de uma fibra convencional. Por outro lado, a operação monomodal, ao longo de uma grande variação de comprimentos de onda, pode ser garantida por uma PCF bem projetada.

Também conhece-se que o número de modos propagantes em uma PCF é função, principalmente, da relação entre o diâmetro dos cilindros de ar, d , e o espaçamento entre os buracos, Λ [72]. Como consequência, nenhuma mudança no perfil de índice de refração é requerido para fabricar-se PCFs com uma grande região monomodal, e diferentes diâmetros dos núcleo.

Por fim, durante um trabalho conjunto com o grupo do Prof. Di Pasquale, de Pisa-IT, uma das tarefas realizadas foi a concepção de uma série de ferramentas em Matlab para conseguir-se projetar geometrias diversas de PCFs tradicionais, além de outras propostas em conjunto, capazes de integrar, de maneira rápida e simples, o programa para gerar a malha do MEF (GID) e aumentar a dinâmica de programação. Tais ferramentas ajudaram naquilo que será comentado mais adiante.

Sendo assim, juntando todas as colocações nos parágrafos anteriores, essas foram as principais motivações para buscar uma PCF com uma região de invariância maior que aquelas encontradas na literatura [72].

Mais uma vez, em acordo com a idéia principal de [59], juntamente com o grande número de ferramentas desenvolvidas para desenhar geometrias diversas de PCFs em

Matlab, começou-se uma série de testes para projetar uma PCF com maior invariância na região modal.

Depois de exaustivas tentativas numéricas, chegou-se a uma PCF com estrutura semelhante àquela da Fig. 5.7. Neste caso, parece que seu formato levemente elipsoidal, em acordo com [58]-[59], mostrou ser responsável pela melhoria na região de invariância. Os parâmetros otimizados encontrados para esta PCF foram $d = 15 \text{ } \mu\text{m}$ e $\Lambda = 25 \text{ } \mu\text{m}$, que garantiram uma região de invariância para comprimentos de onda maiores que 100 nm. Fazendo as contas apenas para a região do núcleo, observa-se que, internamente, esta PCF possui um diâmetro de $35 \text{ } \mu\text{m}$, bem maior que o de uma fibra monomodo comum.

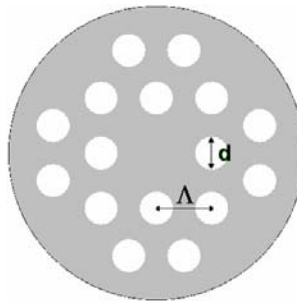


Fig. 5.7. Esquemático da nova PCF com grande região de invariância monomodal.

Dentro dessa topologia, o grande desafio foi tentar justificar quatro buracos de ar centrais, delimitando o quadrado interior com oito buracos de ar; mas, sem eles, não se conseguiu bons resultados e quase não se garantia um confinamento. Anteriormente, em [72], resultados garantiram a região monomodal para $\lambda \gtrsim 300 \text{ nm}$, onde, em um trabalho anterior do mesmo grupo (Russel), esse valor achado tinha sido de $\lambda \gtrsim 458 \text{ nm}$.

A Fig. 5.8 ilustra a curva de dispersão da PCF comentada anteriormente, onde deve-se enfatizar que os valores de dispersão, em torno de $\lambda = 1,5 \text{ } \mu\text{m}$, são típicos de uma fibra monomodo padrão.

E, finalmente, as Figs. 5.9 mostram as três componentes de campo magnético para o único modo encontrado, considerando $\lambda = 100 \text{ nm}$. Nessas figuras, os eixos x e y encontram no sistema MKS de medidas.

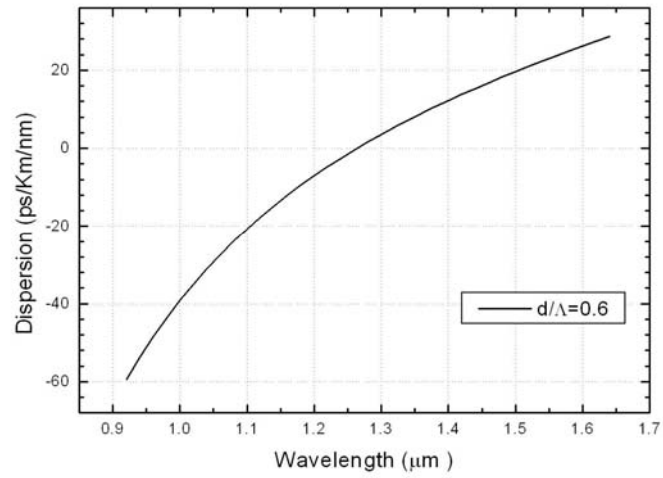


Fig. 5.8. Curva de dispersão para a PCF da Fig. 5.7.

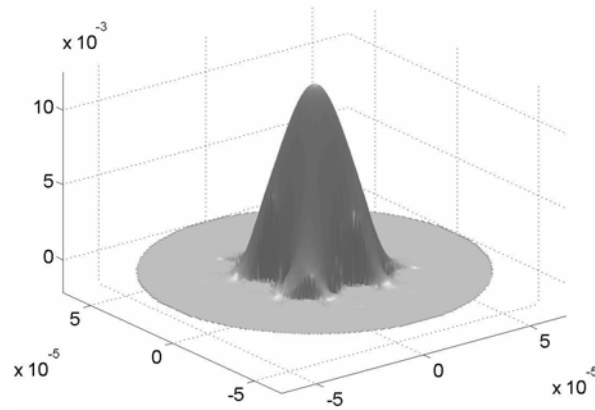


Fig. 5.9.a. Componente de campo magnético H_x , em $\lambda = 100$ nm.

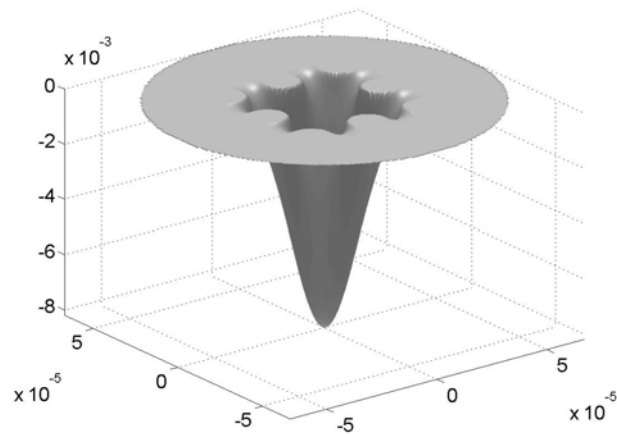


Fig. 5.9.b. Componente de campo magnético H_y , em $\lambda = 100$ nm.

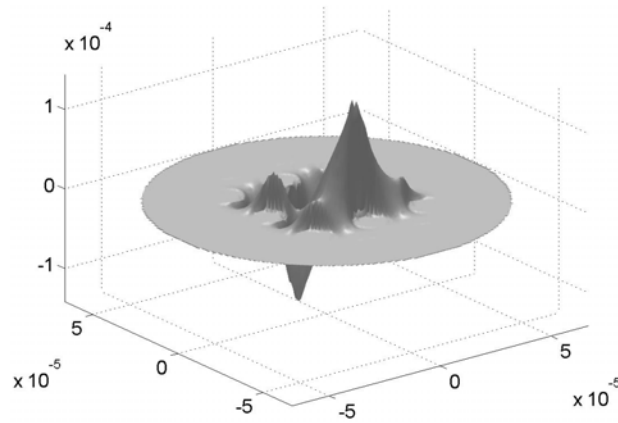


Fig. 5.9.c. Componente de campo magnético H_z , em $\lambda = 100$ nm.

5.3. Conclusões

Neste capítulo, foram apresentados alguns novos resultados do uso conjunto do MEF com cristais fotônicos, utilizando, novamente, algumas das ferramentas implementadas nos três capítulos iniciais.

Na primeira seção, os exemplos aqui mostrados foram importantes, pois apresentaram um estudo inédito do uso de cristais fotônicos em guias planares para reduzir níveis de potência no efeito de biestabilidade óptica, conseguindo-se reduzir tais níveis para o limiar de $30 \mu\text{W}$, quando o caso fundamental era da ordem de $90 \mu\text{W}$. Além disso, também deve-se ressaltar o fato de que os resultados obtidos foram possíveis utilizando um baixo contraste de índice de refração (0,08).

Por outro lado, na segunda parte do capítulo, mostrou-se a concepção de uma nova PCF monomodal com uma região de invariância superior àquelas relatadas na literatura. Baseada numa distribuição de cilindros de ar, distribuídos sobre uma geometria quase elíptica, estas PCFs mostraram possuir também uma grande área efetiva, enquanto mantiveram características muito semelhante às fibras padrões de sílica.

-
-
-

Capítulo 6 – Conclusões gerais e trabalhos futuros

Este capítulo tem como objetivo apresentar as principais conclusões e contribuições deste trabalho de tese, assim como identificar alguns outros trabalhos em potencial a serem idealizados num futuro.

6.1. Conclusões gerais

Ao longo desta tese descreveu-se uma metodologia de ensino do Método dos Elementos Finitos, para, em seguida, aplicá-la na concepção de duas linhas distintas de novas ferramentas, baseadas em propagadores não-lineares e análise modal, ressaltando contribuições em cada um dos três pontos. Para isso, dividiu-se a tese em um total de seis capítulos, incluindo uma introdução geral da tese e este, de conclusões.

A conclusão específica e detalhada de cada capítulo pode ser vista em cada um deles, de modo que os comentários desta seção são apenas de caráter mais geral, e ao mesmo tempo qualitativa.

No Capítulo 2 iniciou-se uma abordagem não convencional do MEF. Não convencional, pois este tinha como objetivo principal explicar o MEF de maneira simplificada, mas ao mesmo tempo com rigor suficiente. Decidiu-se por esta abordagem uma vez que o foco foi voltado para aqueles que não possuem contato algum com o método numérico, e as dificuldades comuns que surgem durante o aprendizado.

A partir daí, no Capítulo 3, introduziu-se uma série de três programas, implementados em Matlab, que serviram também para complementar o que foi explicado no Capítulo 2. Além desse caráter didático, também ficou explicitado como

tais programas mostraram-se bastante eficientes e eficazes no auxílio de vários trabalhos de tese coordenados pelo Prof. Hugo Figueroa.

No Capítulo 4, a contribuição foi realizada pela apresentação de um par de propagadores não-lineares 1+1D e 2+1D, cujas características, em ambos, consistiram em fazer funcioná-los com esquemas de passo adaptativo na propagação, bem como pelo uso de PMLs para meios não-lineares.

Finalmente, o Capítulo 5 foi voltado para aplicações envolvendo ferramentas lineares e não-lineares de análise modal, ambas com aplicações num tema bastante atual, cristais fotônicos. Dentro dessa linha, este capítulo ficou direcionado a aplicações tanto em guias planares como para fibras ópticas.

6.2. Trabalhos futuros

Certamente, esta é uma seção que deve ser bem discutida, devido, principalmente, à maneira como este trabalho de tese foi discutido. De fato, observando-se bem, percebe-se que esta tese apresentou-se em diversos módulos, sempre com contribuições oportunas, mas ainda assim modular. Sendo assim, para trabalhos futuros, pode-se citar vários encaminhamentos, entre eles:

- 1- Incorporar os dois primeiros programas do Capítulo 3 em um só, generalizando a montagem das matrizes para todas as 3 dimensões e com outras formulações em elementos finitos, como elementos curvilíneos, além de acrescentar outras funções de base, como as hermitianas;
- 2- Aproveitando-se do esquema modular e de uma programação estruturada proporcionados pelo MEF, montar um aplicativo, em Matlab, que entregue ao usuário um programa final em Fortran, um propagador. Para isso, o usuário simplesmente teria de responder e preencher alguns formulários em Matlab, que, ao final, dariam todas as informações necessárias para que o propagador fosse entregue (tipo de PML, formulação escalar ou vetorial, linear ou não-linear, etc.). Isso faria com que a possibilidade de erros diminuísse mais ainda, ao mesmo tempo que facilmente poder-se-ia montar uma biblioteca de aplicativos;

- 3- Efetuar um estudo detalhado e bastante sistemático da nova técnica da PML para meios não-lineares, analisando clássicos parâmetros, como largura da PML, refletividade, etc.;
- 4- Utilizar a subrotina da PML não-linear e incorporá-la em propagadores vetoriais, já presentes no grupo de trabalho;
- 5- Fazer um estudo do esquema de passo adaptativo, mas para situações onde o propagador seja temporal, e avaliar possíveis problemas/vantagens de instabilidade/estabilidade em tais formulações;
- 6- Utilizar os dois propagadores não-lineares em situações mais específicas, em especial aplicações de microlentes, um assunto relativamente novo, onde o MEF pode ser importante, uma vez que as dimensões transversais são da ordem do comprimento de onda, e as distâncias axiais não chegam a metros;
- 7- Efetuar um trabalho mais geral a respeito da presença dos cristais fotônicos em guias planares, fazendo uma avaliação com outros tipos de geometrias, comparando resultados, bem como efetuar algumas combinações entre si.

Em princípio, estes são alguns dos possíveis trabalhos futuros. Como pode-se observar, são extensões de cada um dos capítulos. Dentre eles, alguns são fáceis de implementar a curto prazo, e individualmente, outros irão requerer a ajuda de alguns outros colegas de trabalho ou de alunos.

-
-
-

P**ublicações**

A seguir encontram-se listadas apenas as publicações afins com este trabalho de tese, realizadas durante o período do doutorado.

Revistas

K. Z. Nóbrega e H. E. Hernandez-Figueroa, “Optical Bistability in nonlinear waveguides with photonic crystals”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 41, pp. 40-43, 2004.

L. L. Bravo-Roger, K. Z. Nóbrega, H. E. Hernandez-Figueroa e A. P. L. Barbero, “Spatial-Temporal Finite-Element Propagator for ultrashort optical pulses”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol. 16, pp. 132-134, 2004.

C. A. Dartora, M. Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, E. Recami, H. E. Hernandez-Figueroa, “General formulation for the analysis of scalar diffraction-free beams using angular modulation: Mathieu and Bessel beams”, *Optics Communications*, Vol. 222, pp. 75-80, 2003.

L. L. Bravo-Roger, M. Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, A. P. L. Barbero e H. E. Hernandez-Figueroa, Comment on “Efficient time-domain beam-propagation method for modeling integrated optical devices”, *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, Vol. 21, pp. 577, 2003.

Conferências

Arismar Cerqueira S. Jr., K. Z. Nobrega, F. Di Pasquale, e H. E. Hernandez-Figueroa, "A powerful tool based on finite element method for designing photonic crystal devices", aceito para publicação na *IEEE COMSOC International Conference on Telecommunications*, Fortaleza, 2004.

Arismar Cerqueira S. Jr., K. Z. Nobrega, F. Di Pasquale, e H. E. Hernandez-Figueroa, "A novel approach for endlessly single-mode photonic crystal fiber design", aceito para publicação na *OSA Integrated Photonic Research*, EUA, 2004.

M. R. Filho, J. T. Pinho, J. P. da Silva, K. Z. Nóbrega e H. E. Hernandez Figueroa, "A FEM Mesh Generator for Large Size Aspect Ratio Problems with Applications in Optoelectronics", *IEEE/SBMO International Microwave and Optoelectronics Conference*, vol. 1, pp. 589 – 593, Foz do Iguaçu, 2003.

L. L. Bravo-Roger, H. E. Hernandez-Figueroa, A. P. L. Barbero e K. Z. Nóbrega, "Comparison Between Narrow-angle-band and Wide-angle-band spatio-temporal FEM and FD BPM codes for the propagation of ultrashort optical pulses", *IEEE/SBMO International Microwave and Optoelectronics Conference*, vol. 1, pp. 585 – 588, Foz do Iguaçu, 2003.

K. Z. Nóbrega, A. M. F. Frasson e H. E. Hernandez Figueroa, "MNT23D: A Graphical User Interface to Formulation and Element Matrix Assembling in the Finite Element Method", *SBrT/ IEEE COMSOC International Telecommunication Symposium*, Natal, 2002.

K. Z. Nóbrega, A. M. F. Frasson e H. E. Hernandez Figueroa, "NODAL23D: uma interface gráfica para montagem de matrizes elementares em elementos finitos e suas aplicações", *X Simposio Brasileiro de Microondas e Opto-eletrônica*, pp. 142-146, Recife, 2002.

M. R. Filho, J. T. Pinho, V. F. Esquerre, K. Z. Nóbrega e H. E. Hernandez-Figueroa, "Um Novo Malhador para o MEF aplicado a Microondas e Optoeletrônica", *X Simposio Brasileiro de Microondas e Opto-eletrônica*, pp. 672-677, Recife, 2002

-
-
-

Referências

- [1] R. Courant, “ Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration”, *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [2] K. Schellbach, “ Probleme der Variationsrechnung ”, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 41, pp. 293-363, 1851.
- [3] F. Williamson, “A Historical Note on the Finite Element Method”, *Int. J. Num. Meth's. Eng.*, Vol. 15, pp. 930-934, 1980.
- [4] J. Robinson, *Early FEM Pioneers*, Pitman Press, 1985.
- [5] D. S. Burnett, *Finite Element Analysis*, Addison-Wesley, 1987.
- [6] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp, “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, *J. Aer. Sci.*, Vol. 23, pp. 805-823, 1956.
- [7] R. W. Clough, “The Finite Element Method in Plane Stress Analysis”, *Proc. of the American Soc. Of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, pp. 345-378, 1960.
- [8] J. S. Przemieniecki, R. M. Bader, Bozich W. F, J. R. Johnson, W. J. Mykytow. *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDLTR-66-80, Dayton-USA, 1965.
- [9] E. Pestel, “Dynamic Stiffness Matrix Formulation by Means of Hermitian Polynomials”, *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 479-502, 1966.

- [10] F. K. Bogner, R. L. Fox e L. A. Schmit, "The Generation of Interelement, Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas", *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 397- 444, 1966.
- [11] T. H. H. Pian, "Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Stresses", *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 455-478, 1966.
- [12] O. C. Zienkiewicz e Y. K. Cheung, "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics". McGraw-Hill, 1967.
- [13] P. P. Silvester e R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996.
- [14] P. P. Silvester, "Finite Element solution of homogeneous waveguide problems", *Alta Frequenza*, Vol. 38, pp. 313-317, 1969.
- [15] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons: New York, 1993, p. 136.
- [16] Masanori Koshiha. *Optical waveguide theory by the finite element method*. KTK Scientific Publisher, 1992.
- [17] Richard Syms, John Cozens (1992). *Optical Guided Waves and Devices*. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [18] K. Z. Nóbrega, A. S. B. Sombra, "Optimum self phase modulation profile for nonlinear transmission recovery in twin core optical coupler with loss", *Opt. Communications*, Vol. 151, pp. 31-34, 1998.
- [19] M. G. da Silva, K. Z. Nóbrega, A. S. B. Sombra, "Analysis of soliton switching in dispersion-decreasing fiber couplers", *Opt. Communications*, Vol. 171, pp. 351- 364, 1999.
- [20] K. Z. Nóbrega, M. G. da Silva, A. S. B. Sombra, "Optical multistability on the asymmetric nonlinear directional coupler", *J. of Opt. Communications*, Vol. 20, pp. 210-214, 1999.
- [21] K. Z. Nóbrega, M. G. da Silva, A. S. B. Sombra, "Multistable all-optical switching behavior of the asymmetric nonlinear directional coupler", *Opt. Communications*, Vol. 173, pp. 413-421, 2000.

- [22] H. E. Hernández-Figueroa, F. A. Fernandez, Y. Lu e J. B. Davies, "Vectorial Finite Element Modelling of 2D Leaky Waveguides", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, pp. 1710-1713, 1995.
- [23] <http://www-users.informatik.rwth-aachen.de/%7Eroberts/software.html>.
- [24] M. Koshiba e M. Suzuki, "Application of the boundary-element method to waveguide discontinuities", *IEEE Transactions on Microw. Theory Tech.*, Vol. 34, pp. 301-307, 1986.
- [25] Nabil Osman, M. Koshiba e Ryosaku Kaji, "A comprehensive analysis of multilayer channel waveguides", *IEEE J. Light. Technology*, Vol. 12, pp. 821-826, 1994.
- [26] Luis Valor e Juan Zapata, "Efficient finite element analysis of waveguides with lossy inhomogeneous anisotropic materials characterized by arbitrary permittivity and permeability tensors", *IEEE Transac. on Microw. Theory Tech.*, Vol. 43, pp. 2452-2459, 1995.
- [27] A. M. F. Frasson, *Simulação por Elementos Finitos 3D de Problemas Eletromagnéticos no Tempo e na Frequência*, Tese de doutorado, DMO/FEEC/UNICAMP, Abril 2002.
- [28] José Patrocínio da Silva, *Simulação por Elementos Finitos da Propagação de Feixes Ópticos em Estruturas Fotônicas*, Tese de doutorado, DMO/FEEC/UNICAMP, Abril 2003.
- [29] Leonardo Lorenzo Bravo Roger, *Modelos em Elementos Finitos para a Propagação de Ondas no Domínio Espaço Temporal*, Tese de doutorado, DMO/FEEC/UNICAMP, Março 2003.
- [30] Vitaly Félix Rodriguez Esquerre, *Modelagem de Estruturas Fotônicas por Elementos Finitos 2D no Domínio do Tempo*, Tese de doutorado, DMO/FEEC/UNICAMP, Abril 2003.
- [31] J. N. Reddy, D. K. Gartling. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, 1994.
- [32] L. L. Bravo-Roger, K. Z. Nóbrega, H. E. Hernández e A. P. Lopez Barbero, "Spatio-temporal finite-element propagator for ultrashort optical pulses", *IEEE Photon. Tech. Letters*, Vol. 16, pp. 132-134, 2004.

- [33] M. Hano, "Finite element analysis of dielectric-loaded waveguides". *IEEE Trans. on Microw. Theory and Tech.*, Vol. 32, pp. 1275-1279, 1984.
- [34] G. Mur, A. T. Hoop, "A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media". *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 21, pp. 2188-2191, 1985.
- [35] Allan W. Snyder e John D. Love. *Optical waveguide theory*, Chapman&Hall, 1991.
- [36] Alan C. Newell, Jerome V. Moloney. *Nonlinear optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Chapman&Hall, 1992.
- [37] Miroslaw A. Karpierz, "Solitary waves in liquid crystalline waveguides". *Physical Review E*, Vol. 66, artigo número 036603, 2002.
- [38] Tal Carmon, Charalambos Anastassiou, Song Lau, Detlef Kip *et al*, "Observation of two-dimensional multimode solitons". *Optical Letters*, Vol. 25, p. 1113, 2000.
- [39] U. Langbein, F. Lederer, T. Peschel e H. E. Ponath, "Nonlinear guided waves in saturable nonlinear media". *Optics Letters*, Vol. 10, p. 571, 1985.
- [40] G. I. Stegeman *et al*, "Nonlinear slab-guided waves in non-Kerr-like media". *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 22, p. 977, 1986.
- [41] S. J. Al-Bader e H. A. Jamid, "Nonlinear waves in saturable self-focusing thin films bounded by linear media". *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 24, p. 2052, 1988.
- [42] R. D. Ettinger, F. A. Fernandez, B. M. A. Rahman, e J. B. Davies, "Vector finite element solution of saturable nonlinear strip-loaded optical waveguides". *IEEE Photonic Technology Letters*, Vol. 3, p. 147, 1991.
- [43] S. J. Al-Bader e H. A. Jamid, "Guided waves in nonlinear saturable self-focusing thin films". *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 23, p. 1947, 1987.
- [44] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [45] J. Fang e Z. Wu, "Generalized Perfectly Matched Layer for the Absorption of Propagating and Evanescent Waves in Lossless and Lossy Media". *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. 44, pp. 2216-2222, 1996.

- [46] F.D. Hastings, J.B. Schneider, e S.L. Broschat, "Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation". *Journal of the acoustical society of America*, Vol. 100, pp. 3061-3069, 1996.
- [47] A Frasson, S. ^a Carvalho, H. E. Hernández Figueroa e L. S. Mendes, "Uma avaliação das camadas perfeitamente casadas anisotrópicas aplicadas à análise de espalhamento 3D por dielétricos". *Proceedings do IV Congresso Brasileiro de Electromagnetismo*, p. 361, 2000.
- [48] G. R. Hadley, "Wide-Angle beam propagation using Padé approximant operators". *Optics Letters*, Vol. 17, p. 1426, 1992.
- [49] A C. Polycarpou, R. Lyons e C. A Balanis, "A two-dimensional finite element formulation of the perfectly matched layer". *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 6, p. 1296, 1996.
- [50] Takashi Yasui, Masanori Koshiba e Yasuhide Tsuji, "A wide angle finite element beam propagation method with perfectly matched layers for nonlinear optical waveguides". *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol. 17, p. 1909, 1999.
- [51] S. M. Saad, "Review of numerical methods for the analysis of arbitrarily-shaped microwave and optical dielectric waveguides". *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 33, p. 894, 1999.
- [52] K. S. Chiang, "Review of numerical and approximate methods for the modal analysis of general optical dielectric waveguides". *Optical and Quantum Electronics*, Vol. 26, p. 5113, 1994.
- [53] S. S. A. Obayya, B. M. Azizur Rahman, Kenneth T. V. Grattan e H. A. El-Mikati, "Full vectorial finite-element solution of nonlinear bistable optical waveguides". *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 38, p. 1120, 2002.
- [54] Kazuya Hayata e Masanori Koshiba, "Full vectorial analysis of nonlinear-optical waveguides". *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 5, p. 2494, 1988.
- [55] Q. Y. Li, R. A. Sammut e C. Pask, "Variational and finite element analyses of nonlinear strip optical waveguides". *Optics Communications*, Vol. 94, p. 37, 1992.
- [56] H. M. Gibbs. *Optical Bistability: Controlling light with light*, Academic, New York, 1985.

- [57] Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & Sons, 1991.
- [58] M. François, J. Danglot, B. Grimberp. P. Mounaix, M. Muller, O. Vanbesien, D. Lippens, "Photonic band gap material for integrated photonic application: technological challenges", *Microelectronic Engineering*, Vol. 61, pp. 537-544, 2002.
- [59] Ali Adibi, Yong Xu, Reginald K. Lee, Amnon Yariv, Axel Scherer, "Guiding mechanisms in dielectric-core photonic-crystal optical waveguides", *Physical Review E*, Vol. 64, artigo número 033308, 2001.
- [60] K. Z. Nóbrega, A. M. Frasson e H. E. Hernández-Figueroa, "NODAL23D: uma interface gráfica para montagem de matrizes elementares em elementos finitos e suas aplicações", *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, p. 142, agosto 2002, Recife-Pe.
- [61] K. Z. Nóbrega, A. M. Frasson e H. E. Hernández-Figueroa, "MNT23D: A graphical user interface for formulation and element matrix assembling in the finite element method", *IEEE/SBrT International Telecommunications Symposium*, Natal-RN, Brasil.
- [62] A. Yariv. *Optical electronics in modern communications*, Oxford University Press, 1997.
- [63] Yasuhide Tsuji e M. Koshiba, "Guided-Mode and leaky-mode analysis by imaginary distance beam propagation method based on finite element scheme". *J. Lightwave Technology*, Vol. 18, p. 618, 2000.
- [64] C. A. Dartora, M. Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, E. Recami, H. E. Hernandez-Figueroa, "General formulation for the analysis of scalar diffractio-free beams using angular modulation: Mathieu and Bessel Beams". *Optics Communications*, Vol. 222, pp. 75-80, 2003.
- [65] J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell e D. M. Atkin, "All-silica singlemode fiber with photonic crystal cladding", *Opt. Letters*, Vol. 21, pp. 1547-1549, 1996.
- [66] E. Silvestre, P. S. J. Russell, T. A. Birks e J. C. Knight, "Endlessly single mode heat-sink waveguide", *CLEO 1998*, p. 428.
- [67] A. Peyrilloux, T. Chartier, A. Hideur, L. Berthelot, G. Mlin, S. Lempereur, D. Pagnoux e P. Roy, "Theoretical and Experimental Study of the Birefringence of a

Photonic Crystal Fiber”, *IEEE/OSA Journal of Lightwave Technology*, Vol. 21, pp. 536-539, 2003.

[68] J. C. Knight, T. A. Birks, P. St. J. Russell e J. P. de Sandro, “Properties of photonic crystal fiber and the effective index model”, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 15, pp. 748-752, 1998.

[69] P. St. J. Russell, “Photonic crystal fibers”, *Science*, Vol. 229, pp. 358-362, 2003.

[70] F. Di Pasquale, M. Zoboli, M. Federighi e I. Massarek, “Finite-element modeling of silica waveguide amplifiers with high erbium concentration”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 30, pp. 1277-1282, 1994.

[71] J. C. Knight, T. A. Birks, R. F. Cregan, P. S. J. Russell e P. D de Sandro, “Large mode area photonic crystal fibre”, *IEE/IEEE Electronics Letters*, Vol. 34, pp. 1347-1348, 1998.

[72] T. A. Birks, J. C. Knight, P. S. J. Russell, “Endlessly single-mode photonic crystal fiber”, *Optics letters*, Vol. 22, pp. 961-963, 1997.

[73] G. P. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, 1995.

[74] K. Furusawa, A. Malinowski, H. V. Price, T. M. Monro, J. K. Sahu, J. Nilsson, D. J. Richardson, “Highly efficient all-glass double-clad ytterbium doped holey fiber laser”, *CLEO 2002*, pp. 46-47.

[75] L. P. Shen, W.-P. Huang, G. X. Chen e S. S. Jian, “Design and Optimization of Photonic Crystal Fibers for Broad-Band Dispersion Compensation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 15, pp. 540-542, 2003.